

Consistométrie d'un fluide visqueux ou viscoplastique dans un canal rectiligne

Résumé

Ce travail a comme objectif principal d'établir une base théorique pour un nouveau rhéomètre, très économique et facilement utilisable pour quantifier la consistance des matériaux visqueux ou viscoplastiques (consistomètre). L'étude peut servir en outre à comprendre les écoulements géologiques avec un front d'onde avançant, comme les laves torrentielles et les avalanches de neiges poudreuses. Nous traitons finalement un problème de rupture de barrage en écoulement plan avec un modèle de fluide de type Herschel-Bulkley. A partir de l'écoulement résultant, nous proposons un ensemble de solutions analytiques simples qui peuvent être exploiter dans ce but.

1 Introduction

Parmi les besoins des industriels en matière de comportement mécanique des matériaux est de comparer les différents matériaux du point de vue de leur résistance à l'écoulement. Un moyen de mesure consiste à utiliser les rhéomètres de laboratoire, mais le procédé nécessite d'avoir des appareils chers et un temps relativement important pour effectuer les mesures. De plus, ces appareils sont munis d'outils de dimensions assez réduites et des problèmes apparaissent lorsqu'on veut caractériser des mélanges contenant une fraction forte en matières solides. Il existe aussi dans l'industrie du béton une mesure empirique relative aux réactions du matériau quand on cherche à le cisailé. Il s'agit de la "maniabilité" du béton frais, mesurée à l'aide d'un appareil analogue au scissomètre. Le couple appliqué et la vitesse qui en résulte sont mesurés. On peut ensuite comparer les résultats obtenus pour différents matériaux. Dans l'industrie agroalimentaire, on utilise souvent des appareils, encore à l'heure actuelle empirique, appelés « consistomètres ». Une quantité donnée du fluide est mise brusquement en écoulement sous l'effet de la gravité. On provoque ainsi un front d'onde. A un temps donné, on mesure l'abscisse du front qui sera ensuite comparée pour différents matériaux. Parmi ces instruments, on peut citer le consistomètre de Bostwick et le consistomètre d'Adam. Le premier est de forme rectiligne, tandis que le deuxième est de forme cylindrique.

L'objectif principal de ce travail est d'établir une base théorique d'un consistomètres rectiligne pour permettre de quantifier la consistance des matériaux visqueux ou viscoplastiques. Les résultats obtenus permettent en outre d'interpréter les écoulements géologiques, comme les avalanches de neige poudreuse, les écoulements de magma, les laves torrentielles, glissements de terrain, écoulements de sable, glissements sous-marin et les éboulements. Nous étudierons finalement un problème de rupture de barrage en écoulement plan et en écoulement axisymétrique. Les fluides viscoplastiques concernés par l'étude peuvent être les produits agroalimentaires et cosmétiques, les écumes, les composites, les graisses, les bétons, les mélanges eau-charbons, les vases, le charbon liquide, les boues

résiduaux, les boues de forage, les encres, les peintures, les mélanges eau-argiles, les vases (Bird & al 1983, Utracki 1988).

Dans l'écoulement plan, la littérature traite le problème dans l'approximation de l'eau peu profonde, qui suppose que la répartition de la pression le long d'une section transversale est hydrostatique (Barré de Saint Venant 1871). La première solution analytique, dont le frottement pariétal est supposé nul, a été donnée par Ritter (1892). Le front d'onde avance avec une vitesse constante égale à $2\sqrt{gH}$, tandis que l'onde négative (caractérisée par une hauteur égale à la profondeur initiale de l'écoulement "H") recule avec une vitesse constante \sqrt{gH} . Entre ces deux extrémités, la vitesse moyenne U et la profondeur du fluide h sont données par :

$$U = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + \sqrt{gH} \right) \quad [1]$$

$$\sqrt{gh} = \frac{1}{3} \left(2\sqrt{gH} - \frac{x}{t} \right) \quad [2]$$

où $x = 0$ correspond à l'emplacement du barrage (dans tout le document les abscisses seront toujours comptées à partir de cette position), t est le temps et g étant l'accélération de pesanteur.

Il est simple de vérifier que la solution prévoit que la section du barrage est une position critique : la profondeur du fluide $h = h_d$, la vitesse moyenne débitante $U = U_d$, le débit $q = q_d$, et le nombre de Froude $Fr = Fr_d$ sont constants, soit :

$$h_d = \frac{4}{9}H; \quad U_d = \frac{2}{3}\sqrt{gH}; \quad q_d = h_d U_d = \frac{8}{27}\sqrt{gH^3}; \quad Fr = Fr_d = 1 \quad [3]$$

Par conséquent tous les profils de la surface libre pivotent autour de la section du barrage.

La solution de Ritter décrit bien les résultats expérimentaux obtenus avec l'eau (Dressler 1954, Schoklitsch 1917) hormis dans la zone du front d'épaisseur quasi nulle. Il faut naturellement considérer le frottement visqueux dans cette région. Dans ce but, Dressler (1952-1954), puis Witham (1955) utilisent l'approximation locale de l'hydraulique classique pour représenter le frottement pariétal et donnent des approximations de la vitesse du front d'onde.

Ce cas est différent de celui visé dans ce travail. Nous traitons ici le cas des fluides très consistants qui peuvent être évalués à partir du modèle viscoplastique d'Herschel-Bulkley. Le modèle s'écrit en cisaillement simple, comme suit : L'hypothèse de base de la modélisation mathématique consiste à supposer qu'on a affaire dans ce cas à un fluide beaucoup plus consistant que l'eau et la tendance à l'écoulement turbulent est moins prononcée. On est amené alors à supposer que l'écoulement est laminaire et on sert ensuite de la loi de comportement du fluide pour représenter le frottement. A notre connaissance, il n'existe pas à l'heure actuelle un critère relatif à la transition laminaire-turbulent valable pour un modèle d'Herschel-Bulkley. Néanmoins, il existe un certain nombre de critères établis en utilisant les modèles de Bingham (cas particulier du modèle d'Herschel-Bulkley lorsque $n = 1$) et en loi de puissance (cas particulier du modèle d'Herschel-Bulkley lorsque $s = 0$). Dans ce cadre, Qian & Wan (1986) définissent pour le modèle de Bingham le nombre de Reynolds suivant, rapport des contraintes inertielles aux contraintes viscoplastiques :

$$\frac{1}{Re_B} = \frac{1}{Re_\tau} + \frac{1}{Re_\mu} \quad [4]$$

avec $Re_\tau = 8\rho U^2/s$ et $Re_\mu = \rho U D_H/k$ où ρ est la masse volumique, et D_H est le diamètre hydraulique (égal à $4h$ dans le cas d'une section rectangulaire large, h étant la profondeur du fluide). Selon Qian & Wan (1986), le régime est laminaire pour $Re_B < 2100$. Liu & Mei 1990 montrent que la transition est dans le domaine $Re_B = 2000 - 3000$. Kessel & Kranenburg (1996) confirment ces résultats.

Pour qu'un modèle en loi de puissance soit en écoulement laminaire dans une conduite circulaire, Darby (1986) propose la relation empirique suivante :

$$Re \left[= \frac{\rho U^{2-n} D_H^n}{k} \right] < Re_c \left[\approx 0.125 \left(\frac{2(1+3n)}{n} \right)^n (2100 + 875(1-n)) \right] \quad [5]$$

Dans le problème de rupture de barrage, la valeur du nombre de Reynolds 'Re' est maximale aussitôt après la rupture (solution de type Ritter est valable dans ce cas) et à l'endroit même du barrage. En négligeant dans ces instants les effets plastiques, il résulte compte tenu de la solution de Ritter et l'équation (5) (supposé rester valable même dans le problème de rupture de barrage), que le régime est laminaire lorsque :

$$H < \left[\frac{9}{4} \left(\frac{3}{8} \right)^n \frac{Re_c k}{\rho} (\sqrt{g})^{n-2} \right]^{\frac{2}{2+n}} \quad [6]$$

Ainsi, si on veut utiliser cet écoulement comme un consistomètre, on devrait d'abord choisir la valeur de la profondeur initiale H de telle sorte qu'elle puisse vérifier la condition (6).

Le traitement théorique des écoulements à surface libre des fluides complexes, analytique ou numérique, est très rare dans la littérature. Les difficultés expérimentales et celles rencontrées lors de la résolution, sont dues en particulier à l'existence d'une discontinuité dans la loi de comportement du fluide lorsque la contrainte atteint le seuil de plasticité. Quelques investigateurs (Huang & Garcia 1997-1998, Coussot & al 1996, Laigle & Coussot 1997, Coussot 1994, Martinet 1992, Liu & Mei 1989-1990, Johnson 1970 et autres) restent à la frontière de l'hydraulique classique, et ils considèrent sans vérification avoir affaire à un simple cisaillement du fluide sans aucune contrainte normale. Il est pertinent de procéder ainsi pour l'écoulement uniforme dont la solution est bien connue pour des sections transversales possédant une symétrie axiale, avec une zone cisailée au voisinage de la paroi et une zone rigide au voisinage de la surface libre. Les deux zones sont séparées par une surface critique qui correspond au seuil de l'écoulement. Mais en écoulement varié, Piau (1996) a montré que le schéma reproduit de l'hydraulique classique sans prise en compte des contraintes élongationnelles, peut être incomplet. Piau procède alors à une analyse rigoureuse des équations du mouvement avec un modèle d'Herschel-Bulkley. Il aboutit à une formulation simplifiée où l'influence des contraintes normales due au seuil apparaît explicitement. Une généralisation du modèle classique de Saint Venant 1871 a été établie. Faisant apparaître un nouveau nombre de Froude différent de celui de l'hydraulique classique.

L'étude présentée dans ce travail est fondée sur le modèle de Piau (1996). Les équations du mouvement ont été intégrées dans différents régimes d'écoulement (dans le régime inertiel, visqueux et lors de l'arrêt). Pour parvenir à notre objectif de départ, des relations analytiques simples ont été déduites, et qui peuvent être utilisées pour évaluer à moindre frais et avec une bonne précision, la consistance des fluides visqueux ou viscoplastiques. La validation a été établie dans un canal rectiligne en utilisant deux modèles : un modèle

Newtonien très visqueux et un modèle d'Herschel-Bulkley. On obtient un accord remarquable.

2 Théorie

2.1 Equations adimensionnelles du mouvement

En négligeant les effets capillaires, Piau (1996) écrit les équations du mouvement adimensionnelles d'un modèle d'Herschel-Bulkley en prenant des échelles de longueur différentes suivant la direction majeure de l'écoulement x et suivant l'épaisseur de la couche de fluide h , L_0 et $H_0 = \varepsilon L_0$ respectivement. En supposant que l'épaisseur totale est faible, l'auteur estime l'ordre de grandeur en ε des termes des équations (approximation de l'eau peu profonde) et montre l'influence des contraintes normales dues au terme plastique intervenant dans le modèle viscoplastique d'Herschel-Bulkley. La prise de moyenne sur l'épaisseur du fluide permet d'obtenir un système d'équations à une seule variable d'espace, portant sur la vitesse moyenne U et la hauteur d'une section h . Cette analyse a amené Piau à proposer un modèle d'écoulement monodimensionnel différent de celui du modèle classique de Saint-Venant (1871).

Pour un canal horizontal de section rectangulaire, le modèle s'écrit en variables normalisées (indiquées par le signe +) comme suit :

$$\underbrace{\frac{\partial U^+}{\partial t^+}}_{[1]} + \underbrace{\beta U^+ \frac{\partial U^+}{\partial x^+}}_{[2]} + \underbrace{\frac{\phi}{Fr^2} \text{sgn}(h_{,x}) \frac{\partial h^+}{\partial x^+}}_{[3]} + \underbrace{\frac{J^+}{Re_0}}_{[4]} = -\frac{1}{Fr^2} \frac{\partial h^+}{\partial x^+} + \theta(\varepsilon^2) \quad [7]$$

↓
↓
↓
↓

Inertie
élongationnel
pariétal (viscoplastique)
Force motrice

↓
↓

Forces résistantes
Force motrice

avec

$$(t^+, x^+, h^+, U^+, J^+) = \left(\frac{tU_0}{L_0}, \frac{x}{L_0}, \frac{h}{H_0}, \frac{U}{U_0}, \frac{J}{(k/\rho g)(U_0/(H_0)^{m+1})^{1/m}} \right) ; \quad m = \frac{1}{n} \quad [8]$$

$\text{sgn}(h_{,x})$ représente le signe de la tangente de la surface libre (positif, négatif ou nul), compté positif si la profondeur du fluide croît suivant la direction (Ox). J^+ étant la pente de frottement ($J = \tau_w / \rho gh$ où τ_w est la contrainte pariétale) normalisée par la composante visqueuse de la loi de comportement viscoplastique. Le coefficient β étant un paramètre de forme qui tient compte de la non répartition uniforme de vitesse et qui dépend du nombre de Reynolds 'Re'. Pour un modèle Newtonien, $\beta \approx 1.03$ en écoulement turbulent, et ≈ 1.2 en écoulement laminaire.

L'équation de quantité de mouvement (7) fait apparaître trois nombres adimensionnels : le nombre de Froude de l'hydraulique classique Fr , le nombre ϕ qui traduit les effets des contraintes élongationnelles et le nombre de Reynolds Re_0 . Les expressions de ces nombres sont :

$$(Fr, \phi, Re_0) = \left(\frac{U_0}{\sqrt{g H_0}}, \frac{\phi s}{\rho g H_0}, \frac{\rho H_0^{1/m} U_0^{(2m-1)/m}}{k} \varepsilon \right) \quad [9]$$

ϕ est un paramètre de forme supposé par Piau constant pour une situation d'écoulement donnée. En écoulement graduellement varié, la valeur du paramètre ϕ est d'environ 1.5 (cf. Debiante 2000).

D'autre part, l'équation de continuité s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial h^+}{\partial t^+} + U^+ \frac{\partial h^+}{\partial x^+} + h^+ \frac{\partial U^+}{\partial h^+} = 0 \quad [10]$$

Il reste maintenant à évaluer la pente de frottement J^+ . On reproduit pour cela l'hypothèse classique de l'écoulement équivalent local en régime uniforme (cf. Debiante 2000, Huang & Garcia 1998, Coussot 1994). Ainsi, dans l'hypothèse de non glissement à la paroi et un canal infiniment large, J^+ peut être calculée en utilisant l'équation implicite suivante :

$$J^+ = \frac{1}{G(m, Od, h^+, J^+)^{1/m}} \times (m+2)^{1/m} \left(\frac{U^+}{h^{+m+1}} \right)^{1/m} \quad \text{si } \frac{Od}{h^+ J^+} < 1 \quad \text{sinon } U^+ = 0 \quad [11]$$

↓
Terme plastique

↓
Terme visqueux

↓
Ecoulement

↓
Arrêt

avec :

$$G(m, Od_0, h^+, J^+) = \left(1 - \frac{Od_0}{h^+ J^+} \right)^{m+1} \left(1 + \frac{Od_0}{(m+1) h^+ J^+} \right) \quad [12]$$

On fait apparaître un quatrième nombre adimensionnel Od_0 défini comme le nombre d'Oldroyd, rapport des contraintes plastiques et contraintes visqueuses :

$$Od_0 = \frac{s}{k (U_0 / H_0)^{1/m}} \quad [13]$$

En associant l'ensemble de ces équations aux conditions initiales (état du canal à $t = 0$) et aux conditions aux limites (différentes suivant que le réservoir est infiniment long ou l'étendue est limitée), il est possible de résoudre numériquement le problème. Mais, notre objectif dans ce travail est de chercher les approches analytiques de base pour la modélisation numérique aussi bien pour l'application visée (consistométrie).

2.2 Approches analytiques de bases

L'équation de quantité de mouvement (7) exprime l'équilibre entre les forces motrices [4] et les forces résistantes : [1] inertie, [2] contraintes élongationnelles et [3] contraintes pariétales (viscoplastiques). Ces dernières peuvent être exprimées en produit de deux termes, un terme plastique $G(m, Od_0, h^+, J^+)$ et un terme purement visqueux (équation (11)). Le terme plastique varie entre 0 et 1 : égal à 1 si le seuil de contrainte est nul (loi de puissance), proche de 1 si les contraintes visqueuses mises en jeu sont assez importantes devant les contraintes plastiques et nul lors de l'arrêt de l'écoulement. Les forces motrices qui figurent dans l'équation de quantité de mouvement et qui sont représentées par la tangente de la surface libre [4] sont provoquées par la discontinuité brutale de la profondeur du fluide à $t = 0^+$.

2.2.1 Ecoulement avec talus frontal

Dans ces petits instants, les vitesses d'écoulement peuvent être assez importantes ($Re_0 \gg 1$) pour pouvoir négliger le frottement pariétal devant l'inertie. Si la longueur initiale du réservoir est infinie, la solution est dans ce cas analytique "écoulement avec talus frontal" (Annexe A). Les hauteurs et les longueurs sont de l'ordre de H ($H_0 \approx L_0 \approx H$), et compte tenu de la solution inertielle de Ritter les vitesses d'écoulement sont de l'ordre de \sqrt{gH} ($U_0 \approx \sqrt{gH}$ qui représente la valeur de la vitesse de l'onde négative de Ritter). Il est donc plus avantageux dans ce cas d'exprimer les variables adimensionnelles désignées précédemment par le signe + par les variables adimensionnelles suivantes (désignés ici par le signe *)

$$(h^*, U^*, x^*, t^*) = \left(\frac{h}{H}, \frac{U}{\sqrt{gH}}, \frac{x}{H}, \frac{t}{\sqrt{H/g}} \right) \quad \text{et} \quad \eta = \frac{x^*}{t^*} \quad [14]$$

Le temps caractéristique $T_t = \sqrt{H/g}$, qui définit la norme du temps, représente physiquement le temps nécessaire à l'onde négative de Ritter pour parcourir une fois la hauteur initiale du réservoir. Selon l'étude numérique de Mohapatra & al 1999, sous les effets de l'écoulement 2D (la répartition de la pression n'est pas hydrostatique dans ce cas), la profondeur du fluide à l'emplacement du barrage n'atteint véritablement la valeur de Ritter que lorsque le temps physique est supérieure à 9 fois le temps caractéristique T_t .

La solution prédit donc (), comme dans la solution inertielle de Ritter, l'existence d'une onde négative (d'abscisse $x_b^*(t^*)$) qui se propage de l'endroit du barrage vers l'amont. La section du barrage est toujours critique : la profondeur du fluide est constante pour une valeur de ϕ donnée (h_d^* augmente avec ϕ). La vitesse de l'onde négative et la vitesse du front (d'abscisse $x_f^*(t^*)$) sont constantes, mais sous les effets des contraintes élongationnelles leurs valeurs sont inférieures à celles de Ritter. La solution prédit également l'existence d'une position critique (d'abscisse $x_c^*(t^*)$) de telle sorte que la profondeur du fluide varie entre $x_b^*(t^*)$ et $x_c^*(t^*)$ comme suit :

$$\frac{x^*}{t^*} = 2\sqrt{\phi} \left[\arccos \left(\sqrt{\frac{\phi}{h^*}} \right) - \arccos(\sqrt{\phi}) \right] - 3\sqrt{h^* - \phi} + 2\sqrt{1 - \phi} \quad [15]$$

et entre $x_c^*(t^*)$ et $x_f^*(t^*)$ la profondeur du fluide est constante ($h^* = \phi_0 = \lambda \phi$ avec $\lambda \geq 1$), avec dans ce cas :

$$\frac{x_b^*}{t^*} = -\sqrt{1 - \phi} \quad ; \quad \frac{x_c^*}{t^*} = 2\sqrt{\phi} \left[\arccos \left(\sqrt{\frac{\phi}{\phi_0}} \right) - \arccos(\sqrt{\phi}) \right] - 3\sqrt{\phi_0 - \phi} + 2\sqrt{1 - \phi} \quad [16]$$

et

$$\frac{x_f^*}{t^*} = \frac{x_c^*}{t^*} + \phi_0 \sqrt{\phi_0 - \phi} \quad [17]$$

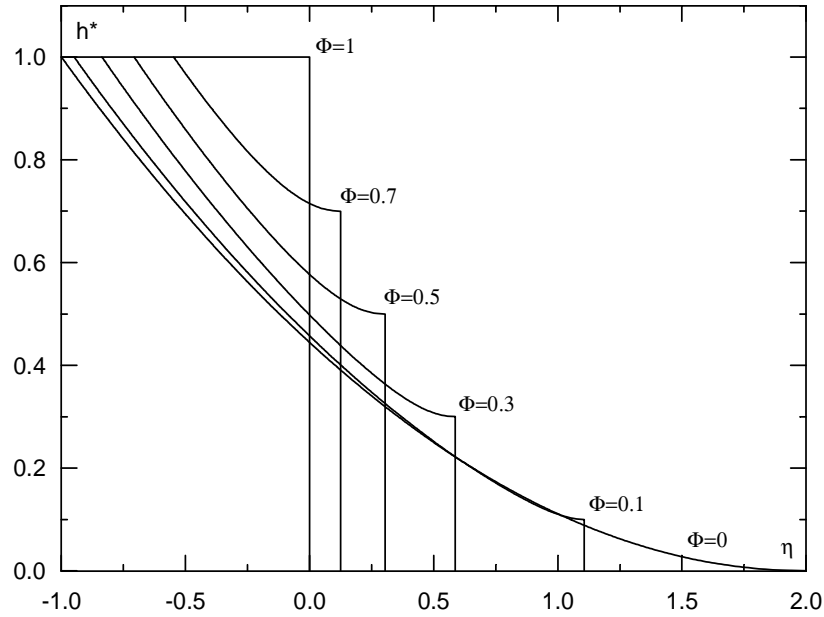


Fig. 1 Ecoulement avec talus frontal, la forme du profil d'écoulement à $t^+ = 0^+$ ($\lambda = 1$) ; $\phi = 0$ solution de Ritter (1892)

De $\phi_0 = 0$ à $\phi_0 = 1$, on passe alors d'un problème de rupture de barrage bien connu en hydraulique (solution de Ritter) à un problème de rupture des talus verticaux bien connu en mécanique des sols : le fluide coule en formant un talus aval et ne s'écoule que si la profondeur initiale du fluide dépasse une valeur limite ($H > \lambda(s \phi / (\rho g))$). La valeur de λ (ou ϕ_0) qui définit la profondeur du fluide à l'abscisse du front d'onde est a priori inconnue. Néanmoins, elle peut être calculée sur des bases relatives à la statique des talus verticaux. Dans le reste de l'analyse, nous supposons d'une part que $\phi \ll 1$ pour pouvoir négliger dans l'écoulement les effets des contraintes élongationnelles, d'autre part $Od \ll 1$ pour pouvoir négliger le terme plastique devant le terme visqueux qui interviennent dans l'équation (11).

2.2.2 Ecoulement du front inertiel et visqueux

Cette première solution n'est vraie qu'à $t = 0^+$ (¹), i.e immédiatement après la rupture de barrage. Elle peut être cependant très utile lors de la résolution numérique afin de surmonter la discontinuité brutale de la profondeur du fluide à $t = 0^+$. Aux temps relativement grands, l'écoulement devient plutôt proche au schéma proposé par Witham (1955). Puisque la solution inertielle prévoit des profondeurs du fluide quasi constantes au voisinage du front d'onde, le frottement pariétal doit être très important dans cette région (équation (11)), voir dominant devant les autres termes résistants. Il résulte, dans un premier temps, que la solution inertielle reste valable loin du front d'onde «région supérieure». Mais dans la «région frontale» l'écoulement peut être purement visqueux. Sur ces bases, nous avons établi des

¹ Il bien cependant de signaler que ceci est dans l'approximation de l'eau peu profonde qui devrait être juste après que le front d'onde a parcouru une certaine distance. En effet, on a déjà signalé plus haut que Mohapatra & al 1999 ont démontré par la résolution numérique que la répartition de la pression n'est pas hydrostatique immédiatement après la rupture, et que sous ces effets la vitesse du front d'onde est d'environ 35% moins de la valeur de Ritter. En outre, d'après les résultats expérimentaux de Dressler, la profondeur du fluide à l'endroit du barrage n'atteint la valeur de Ritter qu'après un certain temps, approximativement égal à $9 T_I$. Résultat assez proche de la valeur obtenue numériquement par Mohapatra & al 1999 ($8 T_I$). Dans toute notre étude, nous avons fait abstraction de ces effets.

solutions donnant le profil de la surface libre ainsi que la loi d'évolution du front d'onde (Annexe B). Cette phase d'écoulement est désignée par «écoulement du front inertiel et visqueux». La vitesse d'onde négative reste toujours égale à la valeur de Ritter ($x_b^*(t^*) = -t^*$), tandis que l'évolution du front d'onde peut être évaluée à partir de la relation approchée suivante :

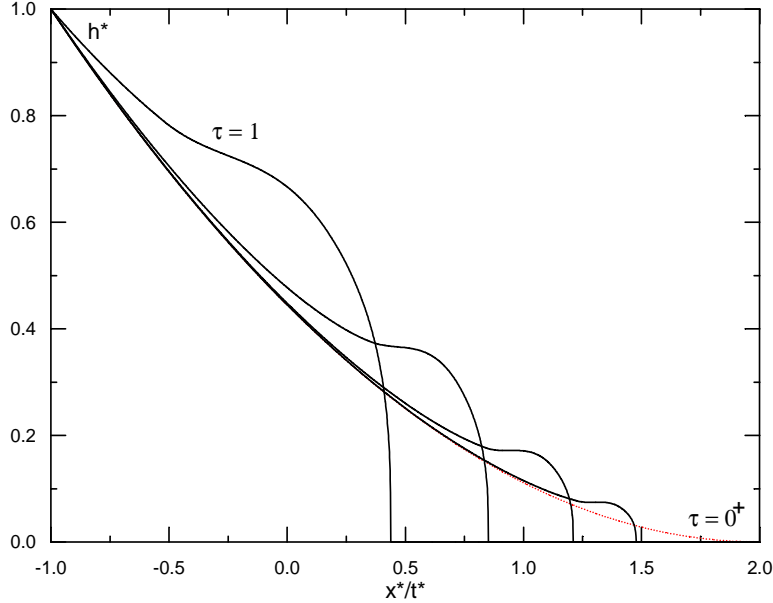


Fig. 2 : Prédiction théorique du profil de la surface libre dans l'écoulement du front inertiel et visqueux ; $\phi = 0$; $\tau = 0^+, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1$

$$\frac{x_f^*}{t^*} \approx 2 - \left(\frac{2+3m}{2+4m} \right) \chi_1(m) \tau^{\frac{m}{2+3m}} + \left(\frac{2+3m}{2+5m} \right) \chi_2(m) \tau^{\frac{2m}{2+3m}} \quad [18]$$

avec :

$$\chi_1(m) \approx \left(\frac{2+3m}{1+m} \right) \left[\frac{(m+1)(3m+1)2^{1/m}}{(4+7m)m} \right]^{\frac{m}{2+3m}} ; \quad \chi_2(m) \approx \frac{0.977}{m^{0.314}} \quad [19]$$

et :

$$\tau = (2+m)^{1/m} \left(\frac{1}{Re_H} \right) t^* ; \quad Re_H = \frac{\rho H^{1/m} (\sqrt{gH})^m}{k} \quad [20]$$

Le profil de la surface libre entre $x_b^*(t^*)/t^*$ et $x_f^*(t^*)/t^*$ est représenté sur la figure 2. On peut voir les deux zones distinctes de l'écoulement (la région supérieure et la région frontale). On peut également constater que l'étendue de la région frontale (visqueuse) augmente avec le temps, par conséquent l'étendue de la région supérieure diminue.

2.2.3 Ecoulement du front visqueux

Cette dernière constatation permet de supposer l'existence d'un temps au-delà ($\tau > \tau_c(m)$), la région supérieure (inertielle) disparaît et l'écoulement devient entièrement visqueux. Cela revient tout simplement à dire que les vitesses d'écoulement deviennent faibles (de l'ordre de $Re_H^m \sqrt{gH}$) pour que la pente de la surface libre soit entièrement compensée par le frottement pariétal ($Re_0 \ll 1$). On obtient ainsi le modèle visqueux qui est

le modèle exact dans le cas d'un fluide en loi de puissance et qui peut être aussi valable avec un fluide viscoplastique si $\phi \ll 1$ et lorsque le temps est restreint à la phase bien avant l'arrêt total de l'écoulement. En variables physiques, le modèle visqueux s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{m+2} \left(\frac{\rho g}{2k} \left(\frac{m}{m+1} \right) \right)^m \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(- \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{2(m+1)}{m} \right) \right)^m \right] = 0 \quad [21]$$

D'autre part, par intégration selon x de l'équation de conservation de la masse (10), on obtient la relation à vérifier impérativement :

$$\int_{-L}^{x_f} h \partial x = LH \quad [22]$$

L est la longueur finie du réservoir

Les conditions initiales sont représentées par l'état du canal à $t = 0^-$. Nous sommes intéressé ici au cas d'un écoulement sur fond aval sec et un fluide initialement en repos dans le réservoir. La profondeur du fluide avant la rupture s'exprime donc (figure) :

$$h(x, t = 0^-) = H \quad \text{si} \quad -L \leq x \leq 0 \quad \text{et} \quad h(x, t = 0^-) = 0 \quad \text{ailleurs} \quad [23]$$

Suivant les conditions aux bords, on peut évoquer deux situations d'écoulement : écoulement de la zone frontale visqueuse et l'étalement du front visqueux. Chaque de ces deux situations est valable dans une gamme adéquate de variation du temps.

- **Écoulement de la zone frontale visqueuse :**

Dans cette situation d'écoulement, on suppose (comme d'ailleurs dans les solutions présentées précédemment) que seulement une partie du fluide située en aval participe véritablement à l'écoulement. L'autre partie, située en amont peut être considérée en repos à la profondeur initiale H . Les conditions aux bords peuvent donc se mettre comme suit :

$$h(x = x_f(t), t) = 0 \quad \text{et} \quad h(x \rightarrow -\infty, t) = H \quad [24]$$

La longueur finie du réservoir L ne devrait pas intervenir puisque seulement une partie du fluide est supposée en écoulement. Compte tenu de l'ordre de grandeur de la vitesse, on propose dans ce cas d'utiliser les variables adimensionnelles suivantes (désignées par le signe \sim) :

$$\left(\tilde{h}, \tilde{x}, \tilde{t} \right) = \left(\frac{h}{H}, \frac{x}{H}, \frac{t}{T_H} \right) \quad \text{où} \quad T_H = (m+2) \left(\frac{2(m+1)}{m} \right)^m \frac{1}{Re_H^m} \sqrt{\frac{H}{g}} \quad [25]$$

Qui permettent aussi de simplifier considérablement l'écriture de l'équation du mouvement (21). On donne après le sens physique du temps caractéristique T_H .

En exprimant que la profondeur du fluide évolue avec une seule longueur de référence qui est l'abscisse du front d'onde, on obtient (voir annexe C-1) des solution affines de la forme :

$$\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}) = X_1 \left(\eta = \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}_f(\tilde{t})} \right) \quad [26]$$

avec

$$\tilde{x}_f(\tilde{t}) = \tilde{c}_f(m) (\tilde{t} - \tilde{c}_1)^{\frac{1}{m+1}} \quad \text{et} \quad \tilde{c}_f(m) \approx \frac{1}{3} + \frac{0.944}{(m+0.548)^{0.85}} \quad [27]$$

La fonction $X_1(\eta)$ qui donne le profil de l'écoulement, est calculée numériquement (figure 3). Comme dans la solution inertielle de Ritter la profondeur du fluide est constante à l'endroit du barrage (indépendante du temps), mais sa valeur est plus grande que la valeur de Ritter (54%

plus grande pour un modèle Newtonien). Il est également impossible dans ce cas de définir une véritable onde négative. On est amené plutôt à définir une position arrière (d'abscisse $\tilde{x}_b(\tilde{t})$) telle que la profondeur du fluide correspondante égale à $0.99H$. Numériquement, on trouve :

$$\tilde{x}_b = -\tilde{c}_b(m)(\tilde{t} - \tilde{c}_1)^{\frac{1}{m+1}} \quad \text{avec} \quad \tilde{c}_d(m) \approx \frac{2}{3} + \frac{3.135m + 1.492}{m^2} \quad [28]$$

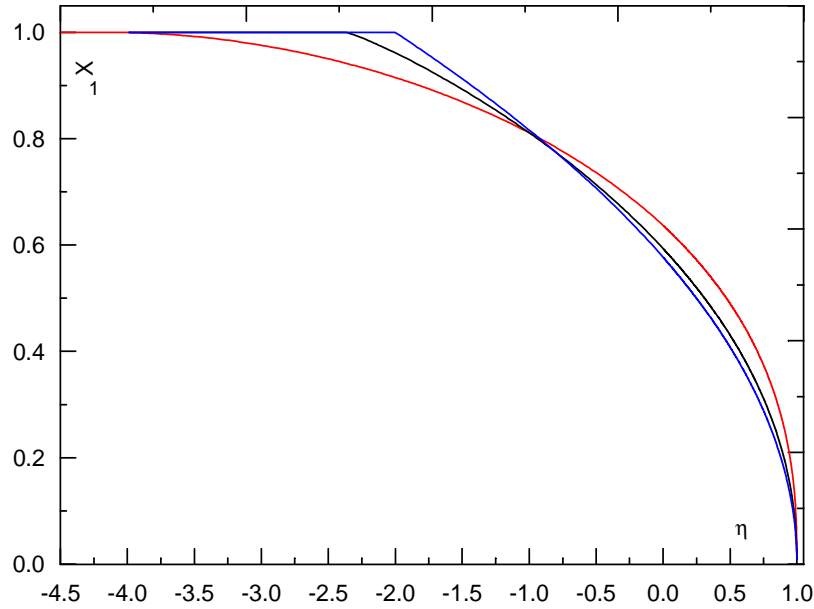


Fig. 3: Forme du profil d'écoulement en fonction de l'indice de Rhéofluidification, modèle en loi de puissance), premier régime visqueux

— m = 2 — m = 8 — m = 00

La constante d'intégration \tilde{c}_1 est nulle si nous faisons abstraction de l'histoire inertielle de l'écoulement. Elle peut être cependant évaluée en assurant la continuité de $x_f(t)$ avec l'écoulement qui précède cette situation, i.e écoulement du front inertiel et visqueux ($\tilde{c}_1 \propto Re_H^{m+1}$).

On peut maintenant donner un sens physique au temps caractéristique T_H . D'après l'équation (28), en faisant abstraction de l'histoire inertielle de l'écoulement, $(1/\tilde{c}_b(m))^{m+1}T_H$ représente tout simplement le temps nécessaire à la position arrière pour parcourir une fois la hauteur initiale de l'écoulement.

• Etalement du front visqueux

La solution présentée plus haut n'est valable qu'avant que la position arrière n'atteigne l'extrémité amont du réservoir, soit $\tilde{x}_b < L/H$. Ultérieurement, les conditions aux bords ne seront pas valables. Les conditions à vérifier dans ce cas s'expriment par un débit nul au bord amont du réservoir et une profondeur nulle à l'abscisse du front, soit respectivement :

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=-L} = 0 \quad \text{et} \quad h(x = x_f(t), t) = 0 \quad [29]$$

Dans ce cas la profondeur du fluide varie remarquablement à l'extrémité amont du réservoir et on fait donc apparaître l'influence de la longueur finie du réservoir L. Il s'agit là d'un problème analogue à l'étalement d'une goutte sur fond sec sans effets capillaires. Les

variables adimensionnelles les plus convenables pour cette situation d'écoulement sont (désignées par le signe $\hat{\ }^{\wedge}$) :

$$\left(\hat{h}, \hat{x}, \hat{t}\right) = \left(\frac{h}{H}, \frac{x}{L}, \frac{t}{T_L}\right) \quad \text{avec} \quad T_L = (m+2) \left(\frac{2(m+1)}{m}\right)^m \frac{1}{Re_L^m (H/L)} \sqrt{\frac{H}{g}} \quad [30]$$

où :

$$Re_L = (H/L) Re_H \quad [31]$$

En faisant abstraction de l'histoire inertielle de l'écoulement, $(1/\tilde{c}_b(m))^{m+1} T_L$ représente le temps nécessaire à la position arrière pour parcourir toute la longueur initiale du réservoir.

En exprimant que la profondeur du fluide rapportée à la profondeur du fluide à l'extrémité amont du réservoir évolue avec une seule longueur du référence qui est la longueur totale de l'écoulement, on obtient des solution affines de la forme (annexe C-2) :

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{h}(\hat{x} = -1, \hat{t}) X_2 \left(\eta = \frac{\hat{x} + 1}{\hat{x}_f(\hat{t}) + 1} \right) \quad [32]$$

avec

$$\hat{x}_f(\hat{t}) = \hat{c}_f(m) [\hat{t} + \hat{c}_2]^{1/3m+2} - 1 \quad ; \quad \hat{h}(\hat{x} = -1, \hat{t}) = \frac{1}{a(m)(\hat{x}_f(\hat{t}) + 1)} \quad ; \quad X_2(\eta) = \left(1 - \eta^{1+m}\right)^{m/2m+1} \quad [33]$$

et

$$a(m) = \int_0^1 X_2(\eta) d\eta \quad ; \quad \hat{c}_f(m) = \left(\frac{(3m+2)}{a(m)^{2m+1}} \left(\frac{2(m+1)^2}{m(2m+1)} \right)^m \right)^{1/3m+2} \quad [34]$$

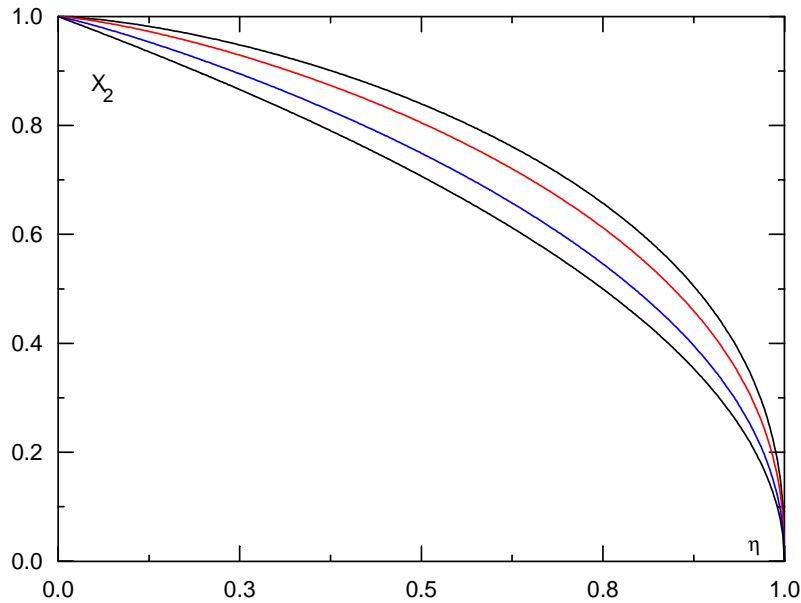


Fig. 4: Forme du profil d'écoulement en fonction de l'indice de Rhéofluidification, modèle en loi de puissance), deuxième régime visqueux

— $m = 2$ — $m = 3$ — $m = 8$ — $m = 00$

Il est clair que cette solution ne peut être vraie que si $\hat{x}_f(\hat{t}) \gg (1 - a(m))/a(m)$ sinon on obtient à l'amont du réservoir des profondeurs supérieures à la valeur physique H . La constante d'intégration \hat{c}_2 peut être évaluée en assurant la continuité de $x_f(t)$ à

$\hat{x}_f(\hat{t}) = (1 - a(m))/a(m)$ avec l'écoulement qui précède cette situation, i.e écoulement de la zone frontale visqueuse. La fonction $X_2(\eta)$ qui donne le profil de l'écoulement est représentée sur la figure 4.

2.2.4 Etat d'équilibre

En négligeant les effets capillaires qui peuvent apparaître aux temps relativement grands où les profondeurs du fluide et les vitesses d'écoulement deviennent très faibles, l'écoulement des fluides visqueux est toujours retardé mais il ne s'arrête jamais. Mais avec des fluides à seuil de contrainte, l'écoulement devrait s'arrêter lorsque le terme plastique intervenant dans l'équation (11) domine le terme visqueux.

Pour caractériser cet état final, on suppose qu'on est dans ce cas lorsque les contraintes pariétales se réduisent au seuil d'écoulement «arrêt au seuil d'équilibre statique». En absence du glissement, le profil de la surface libre lors de l'arrêt \hat{h}_{stop} devrait obéir aux relations suivantes (annexe D) :

$$\hat{h}_{stop} = \phi + \sqrt{(\lambda - 1)^2 \phi + 2Od(\hat{x}_{fstop} - \hat{x})} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{\hat{x}_{fstop}} \hat{h}_{stop} \partial \hat{x} = 1 \quad [35]$$

où \hat{x}_{fstop} est l'abscisse du front d'onde lors de l'arrêt et Od étant le nombre d'Oldroyd défini comme suit :

$$Od = \frac{s}{\rho g H} \left(\frac{L}{H} \right) \quad [36]$$

Suivant les conditions du problème, on peut évoquer deux situations : blocage du fluide amont et l'arrêt. Chaque de ces deux situations est valable suivant la valeur du nombre d'Oldroyd. Si $Od > Od_c$, on est dans la première situation, sinon on est dans la situation d'arrêt, avec :

$$Od_c = \frac{1}{3}(1 - \lambda\phi) \left[1 - \frac{3 - 2\lambda}{2} \phi(\lambda\phi + 1) \right] \quad [37]$$

- **Blocage du fluide amont**

On suppose ici que l'état d'équilibre est atteint avec une partie du fluide, située en amont, qui reste en repos à la profondeur initiale H . Il est possible alors de définir dans ce cas une position arrière $\hat{x} = \hat{x}_{bstop}$, telle que pour $\hat{x} \leq \hat{x}_{bstop}$, $\hat{h}_{stop}(\hat{x}) \approx 1$ et entre $\hat{x} = \hat{x}_{bstop}$ et $\hat{x} = \hat{x}_{fstop}$, la profondeur du fluide varie comme l'équation (35).

- **Arrêt**

On considère qu'on est dans ce cas lorsque toute la quantité initiale du fluide est bougée par l'écoulement qui précède l'arrêt. Dans ce cas la profondeur du fluide lors de l'arrêt varie dans tout le domaine du fluide entre $\hat{x} = -1$ et $\hat{x} = \hat{x}_{fstop}$ comme l'équation (35).

Le profil de la surface libre lors de l'arrêt en fonction de Od est représenté sur la figure 5 et les expressions de \hat{x}_{bstop} et \hat{x}_{fstop} sont en annexe D (annexe D-1 pour la situation du blocage du fluide amont et l'annexe D-2 pour l'arrêt).

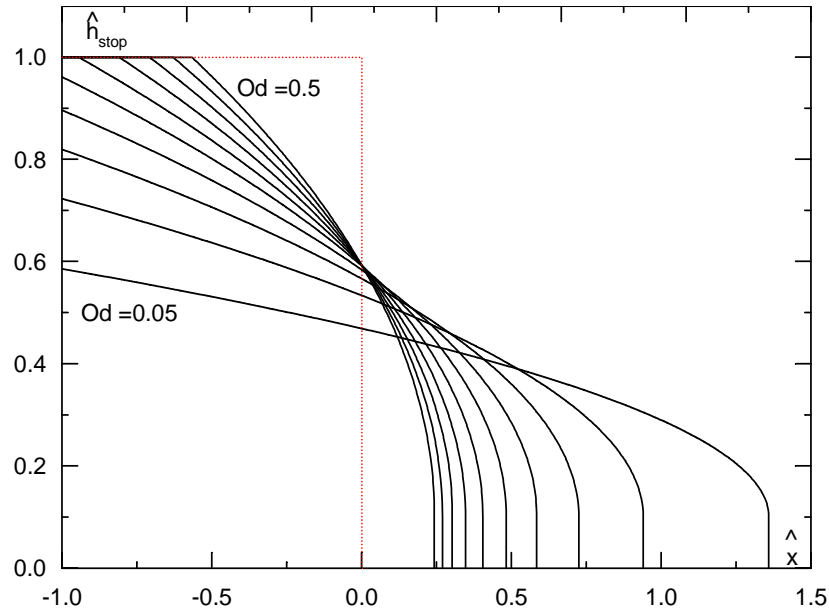


Fig. 5 Profil de la surface libre lors de l'arrêt en fonction du nombre d'Oldroyd $Od = 0,05 \dots 0,5$; $\phi = 0,1$; $\lambda = 1$

2.3 Domaines d'application

Nous avons choisi de présenter les différentes étapes de rupture de barrage en variables adimensionnelles désignées par le signe $\hat{\cdot}$. La solution globale du problème ne peut être que de la forme suivante :

$$\hat{h} = \hat{h}(\hat{x}, \hat{t}, m, Od, Re_L) \quad \text{et} \quad \hat{x}_f = \hat{x}_f(\hat{t}, m, Od, Re_L) \quad [38]$$

Dans tous les cas la solution à $t = 0^+$ est celle de l'écoulement avec talus frontal et l'état final de l'écoulement est atteint lorsque les contraintes pariétales se réduisent au seuil d'écoulement «arrêt au seuil d'équilibre statique». Les autres solutions sont valables sous conditions et dans une gamme adéquate de variation du temps. Le Tableau 1 récapitule le domaine de validité de chaque solution.

Notons enfin que ces relations analytiques ne sont valables que dans l'hypothèse d'eau peu profonde, qui devrait être juste après que le front d'onde a parcouru une certaine distance pour que le rapport de la profondeur et la longueur de l'écoulement soit assez faible ($x_f \gg H$).

Nous avons également supposé dans ce travail que le glissement à la paroi est nul et que les effets capillaires sont négligeables.

Tableau 1 : Domaines d'application des approches analytiques

$$(*) L_c = \frac{H}{3} \left(\frac{\rho g H}{s} - \lambda \varphi \right) \left[1 - \frac{3-2\lambda}{2} \frac{\varphi s}{\rho g H} \left(\frac{\lambda \varphi s}{\rho g H} + 1 \right) \right]$$

Situation	Effets élongationnels (ϕ)	Plasticité (Od)	Temps ou x_f	L
Ecoulement avec talus frontal	/	/	$t = 0^+$	/
Ritter		/	$t = 0^+$	/
Ecoulement de la zone frontale inertielle et visqueuse		(négligeable)	$t \lesssim \frac{\rho H^{1/m} (\sqrt{gH})^{m-1}}{k}$ et $t < L / \sqrt{gH}$	/
Ecoulement de la zone frontale visqueuse	(négligeable) $H \gg \lambda \frac{\varphi s}{\rho g}$	$s \ll k \left(\sqrt{\frac{g}{H}} \right)^{1/m}$	$t \gtrsim \frac{\rho H^{1/m} (\sqrt{gH})^{m-1}}{k}$ $x_f < \frac{1-a(m)}{a(m)} L$ et $x_f \ll x_{f\text{stop}}$	$L \gtrsim \frac{\rho H^{1/m} (\sqrt{gH})^{2m-1}}{k}$
Etalement du front visqueux			$\frac{1-a(m)}{a(m)} L < x_f \ll x_{f\text{stop}}$	/
Blocage du fluide amont	/	/	$x_f = x_{f\text{stop}}$	$L > L_c (*)$
Arrêt	/	/	$x_f = x_{f\text{stop}}$	$L < L_c (*)$

2.4.2.5 Application aux consistomètres.

Compte tenu de nos relations théoriques, il est possible de déduire quelques formules simples qui permettent d'évaluer la consistance des fluides visqueux ou viscoplastiques dans un canal rectiligne.

- Si le seuil de contrainte est nul, on caractérise la consistance du fluide à partir de l'indice de rhéofluidification n et de la consistance k , qui peuvent être évaluées expérimentalement en mesurant aux temps grands l'évolution du front d'onde en fonction du temps. En effet, compte tenu des relations (33) on doit avoir dans ce cas :

$$x_f(t) + L = q t^p \quad [39]$$

Les mesures dans le canal donnent les valeurs expérimentales de $x_f(t)$ qui peuvent être ajustées avec la loi (39). On en déduit les valeurs de q et p . On calcul ensuite les valeurs de m et k à partir des relations suivantes :

$$m = \frac{1-2p}{3p} \quad \text{et} \quad k = \left(\frac{m}{2m+2} \right) \left(\frac{1}{m+2} \right)^{1/m} \left(\frac{\hat{c}_f(m)}{q} \right)^{\frac{3m+2}{m}} V_0^{\frac{2m+1}{m}} \rho g \quad [40]$$

V_0 est le volume initiale du fluide par unité de largeur du canal

Cependant ces relations ne sont exactes que pour les fluides en loi de puissance. Si le fluide obéit à une loi différente, mais de propriétés intemporelles, il est souvent possible de définir dans une plage adéquate de variation de t , un indice apparent n_c et une consistance apparentes k_c . Ces paramètres peuvent être ensuite utilisés pour une meilleure comparaison entre les matériaux très visqueux.

- Pour un fluide à seuil de contrainte, on caractérise la consistance à partir de la valeur du seuil, qui peut être mesurée dans le canal connaissant les valeurs expérimentales de h_{0stop} et x_{fstop} (la profondeur du fluide au bord amont du canal et l'abscisse du front lors de l'arrêt, respectivement). On en déduit compte tenu de l'équation (35) (valable lorsque $L < L_c$ et $\lambda = 1$) la valeur de s , soit :

$$s = \frac{(\varphi h_{0stop} + x_{fstop} + L) \rho g}{\varphi^2} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi h_{0stop}}{\varphi h_{0stop} + x_{fstop} + L} \right)^2} \right] \quad [41]$$

Si on obtient un grand allongement du fluide au repos on peut encore simplifier la relation (41) par la formule approchée suivante :

$$s \approx \frac{\rho g h_{0stop}}{2} \left(\frac{h_{0stop}}{\varphi h_{0stop} + x_{fstop} + L} \right) \quad [42]$$

Bibliographie

- Ayadi A., (1996) Ecoulement à surface libre des boues argileuses, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble I
- Bird, R. B., Gange, D., Yarusso, B. J. 1983 The rheology and flow of viscoplastic materials. Rev. Chem. Eng. 1, 1-70.
- Coussot, P. (1994) Steady, Laminar, flow of concentrated mud suspension in open channel. Journal of Hydraulic Research, 32, N°4 ; 535-559
- Coussot, P., Proust, S., Ancy, C. (1996) Rheological interpretation of deposits of yield stress fluids. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 66, 55-70.
- Cunge, J. A. (1970) Calcul de propagation des ondes de rupture de barrage, La Houille Blanche, 1
- Darby, R. (1986) Laminar and turbulent pipe flows of non-Newtonien fluids, In Encyclopedia of Fluid Mechanics, Vol. 7 (ed. N. P. Cheremisinoff), pp. 19-53. Gulf.
- Debiane, K. (2000) Hydraulique des écoulements laminaires à surface libre dans un canal pour des milieux visqueux ou viscoplastiques. Régimes uniforme, graduellement varié, et rupture de barrage. Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- De Saint-Venant, B. (1871) Théorie du mouvement non permanent des eaux. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 73, 237.
- Dressler, R.F. (1952) Hydraulic resistance effects upon the dam break functions . Journal of Research of the National Bureau of Standards. 49(3):217.
- Dressler, R.F. (1954) Comparison of theories and experiments for hydraulic dam-break wave, Int. Assoc. Sci. Pubs, 3(28), 319-328.

- Faure, J., and Nahas, N. (1961) Etude numérique et expérimentale d'intumescences à forte courbure du front. *La Houille Blanche*, 5:576.
- Hicks, F. E., Steffler, P. M., Yasmin., N. (1997) One-dimensional dam-break solutions for variable width channels, *J. Hydraul. Eng.*, **123**(5), 464-468.
- Huang, X., Garcia, M.H., (1997) A perturbation solution for Bingham-plastic mud flows, *J. Hydraul. Engng ASCE* 123, 986-994.
- Huang, X., Garcia, M.H., (1998) A Herschel-Bulkley model for mud flows down a slope., *J. Fluid Mech.* 374, 305-333.
- Johnson, A. M. (1970) *Physical processes in geology*, Freeman, Cooper, San Francisco, 577 pp.
- Katapodes, N. D. and Schamber, D. R. (1983) Application of dam-break flood wave models, *J. Hydraul. Eng.*, 109(5), 702-721.
- Kessel T.V & Kranenburg C. (1996) Gravity current of fluid mud on sloping Bed. *J. Hydr Engng.*, 122(12), 710-717
- Laigle, D., Coussot, P (1997) Numerical modeling of mudflows, *Journal of Hydraulic Engineering*, 123(7), 617-623.
- Liu K.F., and Mei C.C, (1989) Slow spreading of sheet of Bingham fluid on an inclined plane, *J. Fluid Mechanics*, 207, 505-529
- Liu K.F., and Mei C.C, (1990) Approximate relations for the slow spreading of a thin sheet of Bingham plastic fluid, *Phys. Fluid A* 2 (1), 30-36.
- Magnin A., et Piau J.M., (1987) Shear rheometry of fluids of yield stress, *Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **23**, 91-106
- Magnin A., et Piau J.M., (1990) Cone and plate rheology of yield stress, Study of an aqueous gel" *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **36**, 85-108
- Mohapatra, P. K., Eswaran, V., Bhallamudi, S. M. (1999) Two-dimensional analysis of dam-break flow in vertical plane, *J. Hydr. Engrg*, **125**(2), 183-192.
- Piau, J.M. (1996) Flow of a yield stress fluid in a long domain. Application to flow on an inclined plane, *Journal of Rheology*, **40**(4):711.
- Qian, N, & Wan, Z. (1986) A critical review of the research on the hyperconcentrated flow in china. *Intl Res. And Training Ctr. On Erosion and Sedimentation*, Beijing.
- Ritter, A. (1892) Die Fortpflanzung der Wesser Wellen, *Z. des Ver. Deutsch Ing*; **36**(33):947
- Sakkas, J.G., and Strekoff, R. (1973) Dam break flood in a prismatic dry channel, *J. Hydr. Div*, **99**(12), 2195-2216.
- Schoklitsch A. (1917) Über Damnbruchwellen, *Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften*, **126**; 1489-1514
- Stoker, J. J. (1957) *Water waves*, Interscience Publishers, Wiley, New York, 1957.
- Utracki, L. A. 1988. The rheology of two phase flows. In *rheological measurement*, ed. A. A. Collyer, D. W. Clegg, 479-594. London: Elsevier.

Annexe A : Ecoulement avec talus frontal

Reprenons pour cela les variables adimensionnelles convenables avec cette situation d'écoulement (équation (14)) :

$$(C^*, U^*, x^*, t^*) = \left(\frac{C}{\sqrt{gH}}, \frac{U}{\sqrt{gH}}, \frac{x}{H}, \frac{t}{\sqrt{H/g}} \right) \quad \text{avec} \quad C = \sqrt{gh} \quad (\text{A- 1})$$

La variable 'C' représente physiquement la vitesse de propagation d'une onde de surface dans une eau calme de hauteur h.

En négligeant le frottement pariétal, l'équation (7) devient en fonction du couple $(C = \sqrt{gh}, U)$:

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + 2C^* \left(1 - \frac{\phi}{C^{*2}} \right) \frac{\partial C^*}{\partial x^*} = 0 \quad (\text{A- 2})$$

Le coefficient β est pris par simplification égal à 1.

D'autre part, l'équation de continuité (10) peut se réécrire comme suit :

$$2 \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + 2U^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} + C^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} = 0 \quad (\text{A- 3})$$

On introduit la variable $\eta = x^*/t^*$, et on suppose qu'il existe une solution de la forme :

$$C^* = C^*(\eta) \quad \text{et} \quad U^* = U^*(\eta) \quad (\text{A- 4})$$

et une onde négative d'abscisse $x^* = x_b^*$ (ou $\eta^* = \eta_b^*$) qui se propage dans le réservoir vers l'amont. A cette abscisse la profondeur du fluide égale à la profondeur initiale, et la vitesse est nulle, soit :

$$C^*(\eta = \eta_b) = 1 \quad \text{et} \quad U^*(\eta = \eta_b) = 0 \quad (\text{A- 5})$$

En remplaçant l'hypothèse (A- 1) dans les équations du mouvement (A- 2 et A- 3), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \left[C^*(\eta)^2 - \phi - (U^*(\eta) - \eta)^2 \right] \frac{dC^*(\eta)}{d\eta} = 0 & (a) \\ \frac{dU^*(\eta)}{d\eta} = -2 \left(\frac{U^*(\eta) - \eta}{C^*(\eta)} \right) \frac{dC^*(\eta)}{d\eta} & (b) \end{cases} \quad (\text{A- 6})$$

Supposons maintenant que $dC^*/d\eta \neq 0$ et que $U^*(\eta) \geq \eta$, il vient d'après l'équation (A- 6a):

$$U^*(\eta) = \eta + \sqrt{C^*(\eta)^2 - \phi} \quad (\text{A- 7})$$

qui montre qu'on doit avoir $\forall \eta \quad C^*(\eta) \geq \sqrt{\phi}$. En remplaçant $\eta = \eta_b$ dans l'équation (A- 7) et compte tenu des conditions (A- 5), il vient :

$$\eta_b = \frac{dx_b^*}{dt^*} = -\sqrt{1 - \phi} \quad (\text{A- 8})$$

Cette expression représente la vitesse de l'onde négative qui reste comme dans la solution de Ritter constante, mais dans ce cas les contraintes élongationnelles (représentées à travers le nombre adimensionnel ϕ) diminuent la valeur de la vitesse de l'onde.

En remplaçant l'équation (A- 7) dans l'équation (A- 6b), on obtient une équation différentielle de premier ordre qui a une solution implicite, soit :

$$\eta = 2\sqrt{\phi} \left[\arccos\left(\frac{\sqrt{\phi}}{C^*(\eta)}\right) - \arccos(\sqrt{\phi}) \right] - 3\sqrt{C^{*2}(\eta) - \phi} + 2\sqrt{1 - \phi} \quad (\text{A- 9})$$

D'autre part, puisque $\forall \eta \ C^*(\eta) \geq \sqrt{\phi}$, la condition en aval exprimant que la profondeur du fluide est nulle à l'abscisse du front d'onde, n'est pas vérifiable dans le cas des fluides à seuil de contrainte. On est amené alors à définir une hauteur critique $h^* = \phi_0$ d'abscisse $x^* = x_0^*$ ($\eta = \eta_0$) au-dessous de laquelle les équations (A- 7) et (A- 9) ne sont pas valables. Compte tenu du système (A- 6), il convient de prendre lorsque $\eta > \eta_0$, $dC^*/d\eta = 0$ et $dU^*/d\eta = 0$. Cela signifie que la profondeur du fluide et la vitesse sont constantes dans cette région. L'expression de η_0 peut être déduite à partir de l'équation (A- 9) en remplaçant $\eta = \eta_0$ et $C^*(\eta_0) = \sqrt{\phi_0}$, soit :

$$\eta_0 = 2\sqrt{\phi} \left[\arccos\left(\sqrt{\frac{\phi}{\phi_0}}\right) - \arccos(\sqrt{\phi}) \right] - 3\sqrt{\phi_0 - \phi} + 2\sqrt{1 - \phi} \quad (\text{A- 10})$$

Cette solution prédit donc un profil d'écoulement qui varie entre $\eta = \eta_b$ et $\eta = \eta_0$ comme l'équation (A- 9) se raccordant à un profil horizontal limité à l'aval (à $\eta = \eta_0$) par une onde de choc (voir la figure 10).

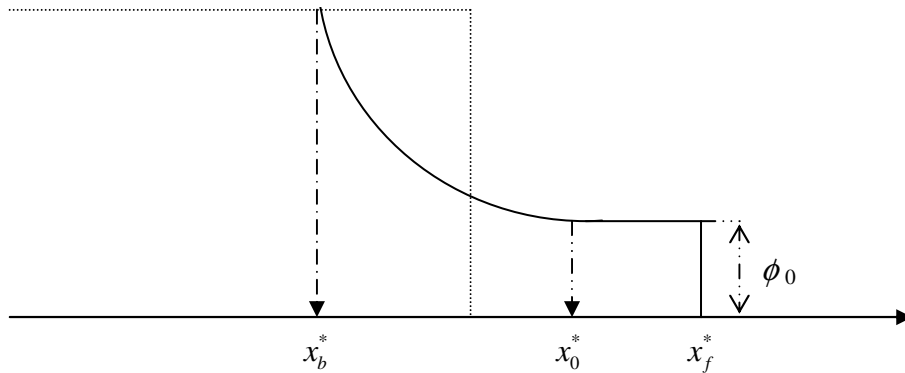


Fig. 6 Schéma proposé pour l'étude de l'écoulement avec talus frontal

Qualitativement, cette solution ressemble à celle de Stocker (1957) lorsque le fluide est sans seuil de contrainte et le fond aval est mouillé. Mais ce qu'on obtient ici permet de retrouver la propriété des fluides plastique (comme le cas des sols) de couler en formant un talus amont. La conservation de la masse exprime que :

$$\int_{x_b^*}^{x_0^*} h^* \partial x^* + \phi_0 (x_f^* - x_0^*) = -x_b^*$$

Cette expression permet de calculer la position du front d'onde $x^* = x_f^*$ ($\eta = \eta_f$), on obtient :

$$\eta_f = \eta_0 + \phi_0 \sqrt{\phi_0 - \phi} \quad (\text{A- 11})$$

Une expression qui représente la position du front d'onde ($x^* = x_f^*$) en variable η .

On vérifie que le problème est ainsi défini. On retrouve bien la solution de Ritter lorsque $\phi = 0$.

Annexe B : Ecoulement du front inertiel et visqueux

En gardant la même normalisation que l'analyse précédente (équation A- 1) et en négligeant les effets plastiques, les équations du mouvement se réécrivent comme suit :

$$2 \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + 2U^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} + C^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} = 0 \quad (\text{B- 1})$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + 2C^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} = -\frac{1}{Re_H} \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n \frac{U^{*n}}{C^{*2(n+1)}} \quad (\text{B- 2})$$

où le paramètre de forme β est pris, par simplification, égal à 1.

Pour la résolution, on suppose que le réservoir est infiniment long. On définit deux points particuliers $x = \zeta(t)$ et $x = \delta(t)$ (figure 11). En aval de $\zeta(t)$, «région supérieure», on suppose que les effets du frottement visqueux sont minimes, mais non négligeables. En amont de $\delta(t)$ «région frontale», on considère que les effets d'inertie sont négligeables.

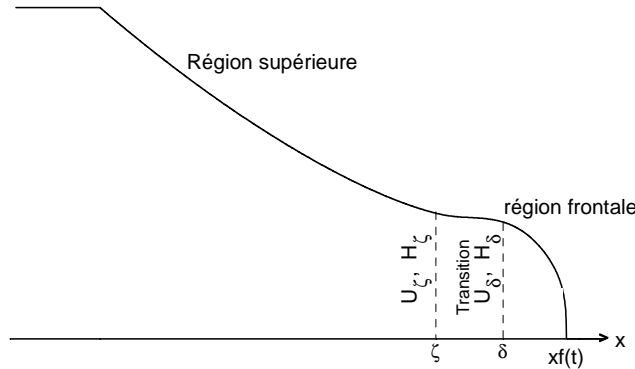


Fig. 7: Schéma adopté pour l'étude de l'écoulement du front inertiel et visqueux

B-1 Région supérieure

Reprenons la variable τ défini précédemment (équation (20)) :

$$\tau = (2+m)^{1/m} \left(\frac{1}{Re_H} \right) t^* \quad \text{avec} \quad Re_H = \frac{\rho H^{1/m} (\sqrt{gH})^m}{k} \quad (\text{B- 3})$$

En supposant que τ est un petit paramètre et qu'on peut faire un développement de U^* et C^* en puissance de ce petit paramètre, i.e :

$$U^*(x^*, t^*) = U_0(x^*/t^*) + U_1(x^*/t^*)\tau + U_2(x^*/t^*)\tau^2 + \dots \quad (\text{B- 4})$$

et

$$C^*(x^*, t^*) = C_0(x^*/t^*) + C_1(x^*/t^*)\tau + C_2(x^*/t^*)\tau^2 + \dots \quad (\text{B- 5})$$

En substituant dans les équations (B- 1) et (B- 2), et en identifiant ensuite terme à terme, il résulte à l'ordre 0 :

$$U_0(\eta) = c_0 - \frac{2}{3}\eta; \quad C_0(\eta) = \frac{1}{3}\eta \quad (\text{B- 6})$$

où la variable $\eta = c_0 - x^*/t^*$ a été introduite, c_0 est une constante d'intégration.

Après calcul, on aboutit à l'ordre 1 aux expressions suivantes :

$$U_1(\eta) = \frac{3^{2(n+1)} c_0^n}{4} \eta^{-2(n+1)} \left[A(n) + \sum_{i=1}^{\infty} B_i(n) \eta^i \right] + c_1(n) \eta^{3/2} \quad (\text{B- 7})$$

$$C_1(\eta) = \frac{3^{2(n+1)} c_0^n}{10} \eta^{-2(n+1)} \left[\frac{7}{4} A(n) + 3 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{7}{4} B_i(n) + 3D_i(n) \right) \eta^i \right] + \frac{7}{10} c_1(n) \eta^{3/2} \quad (\text{B- 8})$$

avec

$$A(n) = -\frac{12+4n}{4n+7}; \quad D_i(n) = \left(\frac{2}{3c_0} \right)^i \left(\prod_{j=1}^i (n-j+1) \right) \frac{(-1)^i}{i!}; \quad B_i(n) = \frac{12-2i+4n}{2i-4n-7} D_i(n) \quad (\text{B- 9})$$

Si la vitesse d'onde négative égale à la valeur de Ritter, i. e. $= -\sqrt{gH}$ ($\eta = 3$), il vient $c_0 = 2$ et :

$$c_1(n) = -\frac{2^{n-2} \sqrt{3}}{9} \left[A(n) + \sum_{i=1}^{\infty} B_i(n) 3^i \right] \quad (\text{B- 10})$$

La variable η est définie dans ce cas dans l'intervalle $]0,3]$

B-2 Région frontale

L'approximation de la région supérieure n'est valable que loin du front d'onde. Dans la région frontale, le frottement visqueux domine les termes inertiels. On suppose alors dans la région frontale que les grands termes

$$2C^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*}, \quad -\frac{1}{Re_H} \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n \frac{U^{*n}}{C^{*2(n+1)}} \quad (\text{B- 11})$$

intervenants dans l'équation (B- 2) sont égaux. A l'ordre 0 $U^*(x^*, t^*) \approx U_f^*(t^*)$, et

$$C^*(x^*, t^*) \approx \left[\frac{(n+2) \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n}{Re_H} U_f^*(t^*)^n (x_f^* - x^*) \right]^{\frac{1}{2n+4}} \quad (\text{B- 12})$$

L'idée est de supposer alors que U^* et C^{*2n+4} peuvent être exprimés en puissance de $(x_f^* - x^*)$ ou le mieux, si on veut garder la même normalisation que l'analyse précédente, en série de $(\eta - \eta_f)$ où η_f représente l'abscisse du front d'onde en variable η . On obtient à l'ordre 1 :

$$U^*(x^*, t^*) = U^*(\eta, \tau) \approx U_f^*(\tau) + \frac{n}{n+3} \frac{1}{U_f^*(\tau)} \frac{dU_f^*(\tau)}{d\tau} \tau (\eta - \eta_f) + \dots \quad (\text{B- 13})$$

$$C^*(x^*, t^*) \approx (n+2)^{\frac{1}{2n+4}} \left[U_f^*(\tau)^n \tau (\eta - \eta_f) + \frac{n^2}{2(n+3)} U_f^*(\tau)^{n-2} \frac{dU_f^*(\tau)}{d\tau} \tau^2 (\eta - \eta_f)^2 + \dots \right]^{\frac{1}{2n+4}} \quad (\text{B- 14})$$

avec $U_f^*(\tau) = dx_f^*/dt^*$. Il reste à évaluer $U_f^*(\tau)$, i. e. la vitesse du front d'onde.

B-3 Evaluation de la vitesse du front

Pour cela, on néglige la transition entre la région supérieure et la région frontale, i. e. on suppose que $\delta(t) \approx \zeta(t)$. Ainsi, la vitesse du front d'onde peut être obtenue à partir de

l'équation différentielle suivante :

$$C_{\zeta}^{*(2n+4)} \frac{dU_f^*}{d\tau} = \frac{(n+3)(n+2)}{2n} U_f^{*n} (U_{\zeta}^* - U_f^*) \left((2-n)U_f^* + nU_{\zeta}^* \right) \quad (\text{B- 15})$$

où H_{ζ}^* et U_{ζ}^* sont, en variables réduites, la profondeur et la vitesse moyenne à $x = \zeta(t)$.

Pour évaluer ces paramètres, on considère qu'on est dans ce cas lorsque $\partial U^* / \partial \eta = 0$, qui semble correspondre à l'abscisse à partir de laquelle l'approximation de la région supérieure devient inexacte, il résulte :

$$\tau = \left(\frac{2^{3-n}}{3^{2n+3}} \right) \eta_{\zeta}^{2n+3} \frac{1}{\left[-2(n+1)A(n) + \sum_{i=1}^{\infty} B_i(n)(i-2(n+1))\eta_{\zeta}^i \right] + \frac{3}{2}c_1\eta_{\zeta}^{1/2}} \quad (\text{B- 16})$$

Pour chaque valeur de η_{ζ} (comprise entre 0 et 3), on peut calculer τ en utilisant la relation ci-dessus. On en déduit ensuite, en remplaçant dans les formules de la région supérieure (équations B- 4 et B- 5), les valeurs de U_{ζ}^* et H_{ζ}^* correspondantes.

- Pour τ petit ($C_{\zeta}^* \rightarrow 0$), l'équation (B- 15) donne approximativement $U_{\zeta}^* \approx U_f^*$. Si de plus, on se limite à $\tau \rightarrow 0$, il vient :

$$U_f^*(\tau) \approx 2 - \chi_1(n) \tau^{\frac{1}{2n+3}} \quad \text{avec} \quad \chi_1(n) = \left(\frac{2n+3}{n+1} \right) \left[\frac{(n+1)(3+n)2^n}{(4n+7)} \right]^{\frac{1}{2n+3}} \quad (\text{B- 17})$$

Le premier terme représente la solution inertielle de Ritter, et le second terme représente l'influence de petites perturbations visqueuses dans un écoulement principalement inertiel. Ce deuxième terme varie comme $t^{1/(2n+3)}$, résultat identique à celui obtenu par Piau (cf. Ayadi 1996) en utilisant une analyse différentielle.

- Pour τ plus grand (i.e lorsque $\delta^*(t^*) \rightarrow -1$), $C^*(x^* = \delta^*(t^*), \tau) \rightarrow 1$ et $U^*(x^* = \delta^*(t^*), \tau) \rightarrow 0$. Ainsi, l'équation (B- 15) se simplifie comme suit :

$$\frac{dU_f^*}{d\tau} = -\frac{(n+3)(4-n^2)}{2n} U_f^{*n+2} \quad (\text{B- 18})$$

dont la solution est :

$$U_f^*(\tau) = \left[\frac{(n+1)(n+3)(4-n^2)}{2n} \right]^{\frac{1}{n+1}} (\tau - c)^{-\frac{1}{n+1}} \quad (\text{B- 19})$$

où c est une constante d'intégration.

Dans le cas général, l'équation (B- 15) a été résolue numériquement et les données numériques ont été calées, par la méthode des moindres carrées, avec la loi suivante :

$$U_f^*(\tau) \approx 2 - \chi_1(n) \tau^{\frac{1}{2n+3}} + \chi_2(n) \tau^{\frac{2}{2n+3}} \quad \text{avec} \quad \chi_2(n) \approx 0.977 n^{0.314} \quad (\text{B- 20})$$

En intégrant, on obtient l'abscisse du front d'onde :

$$\frac{x_f^*}{t^*} \approx 2 - \left(\frac{2n+3}{2n+4} \right) \chi_1(n) \tau^{\frac{1}{2n+3}} + \left(\frac{2n+3}{2n+5} \right) \chi_2(n) \tau^{\frac{2}{2n+3}} \quad (\text{B- 21})$$

Ainsi, le problème est totalement défini. Il est possible donc de tracer séparément la région frontale et la région supérieure, et raccorder tout simplement les deux à partir de leur point d'intersection.

Annexe C :Ecoulement du front visqueux

Rappelons qu'on est dans ce cas lorsque le terme visqueux domine tous les autres termes résistants. Le modèle d'écoulement qui s'applique au cas considéré est représenté par l'équation (21) et suivant la valeur du temps, on peut prévoir deux situations d'écoulement : l'écoulement de la zone frontale visqueuse et l'étalement du front visqueux.

C-1 Ecoulement de la zone frontale visqueuse

Reprenons d'abord les variables adimensionnelles convenables pour cette situation d'écoulement (équation (25)) :

$$\left(\tilde{h}, \tilde{x}, \tilde{t}\right) = \left(\frac{h}{H}, \frac{x}{H}, \frac{t}{T_H}\right) \quad \text{où} \quad T_H = (m+2) \left(\frac{2(m+1)}{m}\right)^m \frac{1}{Re_H^m} \sqrt{\frac{H}{g}} \quad (\text{C- 1})$$

L'équation (21), se réécrit :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\left(-\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\tilde{h}^{\frac{2m+2}{m}} \right) \right)^m \right] = 0 \quad (\text{C- 2})$$

On suppose qu'il existe des solutions affines de la forme suivante :

$$\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}) = X_1 \left(\eta = \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}_f(\tilde{t})} \right) \quad (\text{C- 3})$$

Les fonctions $\tilde{x}_f(\tilde{t})$ et $X_1(\eta)$ peuvent être obtenues par substitution directe dans l'équation du mouvement (C- 2), il résulte :

$$\tilde{x}_f(\tilde{t}) = \tilde{c}_f(m) (\tilde{t} - \tilde{c}_1)^{\frac{1}{m+1}} \quad (\text{C- 4})$$

où \tilde{c}_1 et $\tilde{c}_f(m)$ sont des constantes. La première est nulle si nous faisons abstraction de l'histoire inertielle de l'écoulement (Re_H petit), mais en tenant compte de l'écoulement qui précède cette situation «écoulement du front inertiel et visqueux», \tilde{c}_1 devrait varier comme Re_H^{m+1} . L'expression de $\tilde{c}_f(m)$ peut être déterminée à partir de l'équation différentielle suivante

$$\frac{d}{d\eta} \left(\left(-\frac{d}{d\eta} \left(X_1^{\frac{2m+2}{m}} \right) \right)^m \right) - \left(\frac{1}{m+1} \tilde{c}_f(m)^{m+1} \right) \eta \frac{dX_1}{d\eta} = 0 \quad (\text{C- 5})$$

Si on fixe $\tilde{c}_f = 1$, on devrait remplacer $\tilde{x}_f(\tilde{t})$, intervenant dans la définition de la variable η , par une fonction $\tilde{x}_*(\tilde{t})$ quelconque mais qui varie comme $\tilde{x}_f(\tilde{t})$, soit par simplification $\tilde{x}_*(\tilde{t}) = (\tilde{t} - \tilde{c}_1)^{1/(m+1)}$. Il est possible dans ce cas de résoudre l'équation (C- 5) avec pour conditions aux limites

$$X_1(\eta \rightarrow \infty) = 0; \quad X_1(\eta \rightarrow -\infty) = 1 \quad (\text{C- 6})$$

On déduit ensuite $\tilde{c}_f(m)$ qui correspond à $X_1(\tilde{c}_f(m)) = 0$. Cependant, la solution exacte n'est pas évidente. Néanmoins, on peut trouver une solution approchée à l'aide de développements en série autour de $\eta = 1$. Pour cela, il est avantageux d'exprimer l'équation (C- 5) comme suit

$$\left(\frac{df}{dp} \right)^{m-1} \left[(2m+1)f \frac{d^2 f}{dp^2} + \left(\frac{df}{dp} \right)^2 \right] + p \frac{df}{dp} - \frac{df}{dp} = 0 \quad (\text{C- 7})$$

où

$$X_1(\eta) = \left[\left(\frac{2m+1}{2m+2} \right) \left(\frac{1}{m+1} \right)^{1/m} \tilde{c}_f(m)^{\frac{m+1}{m}} f(p) \right]^{\frac{m}{2m+1}} ; \quad p = 1 - \eta \quad (\text{C- 8})$$

avec $f(0) = 0$. En utilisant le développement de Taylor au voisinage de $p=0$ en commençant par un terme proportionnel à p , et après substitution et identification terme à terme les puissances de p , on obtient :

$$f(p) \approx p - \frac{1}{2(3m+1)} p^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{5m+3-5m^2}{(5m+2)(3m+1)^2} \right) p^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{109m^3 + 45m^2 - 70m^4 - 48m - 18}{(3m+1)^3(5m+2)(7m+3)} \right) p^4 + \dots \quad (\text{C- 9})$$

Le premier terme de cette série montre qu'au voisinage du front, i. e. $\hat{x} \rightarrow \hat{x}_f$, la hauteur varie comme $(x_f - x)^{m/(2m+1)}$.

L'équation (C- 9) est une approximation raisonnable du profil de la surface libre, mais elle nécessite de connaître la valeur de $\tilde{c}_f(m)$. Pour cela, nous avons résolu numériquement l'équation différentielle (C- 5). Contrairement à la solution inertielle de Ritter (1892), il est formellement impossible dans ce cas de définir une véritable onde négative, on est amené plutôt à définir (comme dans le problème de couche limite) une position arrière critique $\tilde{x} = \tilde{x}_b(\tilde{t})$ telle que h soit égal à 0.99H, soit :

$$\tilde{x}_b = -\tilde{c}_b(m) (\tilde{t} - \tilde{c}_1(m))^{\frac{1}{m+1}} \quad \text{pour } \tilde{h} = 99\% \quad (\text{C- 10})$$

Les fonctions $\tilde{h}_d(m)$, $\tilde{c}_b(m)$ et $\tilde{c}_f(m)$ sont calculées numériquement. Les données ont été calées par la méthode des moindres carrés sur les lois suivantes (valables en particulier lorsque $m \geq 1$:

$$\tilde{h}_d(m) \approx \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{0.135}{0.265 + m} \quad \text{erreur} < 0.02\% \quad (\text{C- 11})$$

$$\tilde{c}_b(m) \approx \frac{2}{3} + \frac{3.135m + 1.492}{m^2} \quad \text{erreur} < 1.1\% \quad (\text{C- 12})$$

$$\tilde{c}_f(m) \approx \frac{1}{3} + \frac{0.944}{(m + 0.548)^{0.85}} \quad \text{erreur} < 0.4\% \quad (\text{C- 13})$$

où $\tilde{h}_d(m) = h_d / H = X_1(0)$ est la profondeur de l'écoulement à $\tilde{x} = 0$.

Notons que l'approximation du profil de la surface libre représentée par l'équation (C- 9) donne des résultats meilleurs que 4%, cela dans le domaine $[\tilde{x}_b, \tilde{x}_f]$, ailleurs ($\tilde{x} < \tilde{x}_b$) il convient de considérer que $X_1(\eta) \approx 1$.

Enfin, il est simple de montrer l'intérêt de tenir compte de l'écoulement du front inertiel et visqueux qui précède cette phase de l'écoulement. En effet lorsqu'on calcule le nombre de Froude à l'endroit du barrage ($Fr(x=0, t) = U(x=0, t) / \sqrt{g h(x=0)}$), on trouve que ce

nombre varie comme $\tilde{t}^{-\frac{1}{m+1}}$, soit $Fr(x=0, t \rightarrow 0) \rightarrow \infty$. Le nombre de Froude prend donc des valeurs indéfinies immédiatement après la rupture de barrage. Ce qui n'est pas physique dans ce problème d'écoulement à surface libre. Ici, on doit avoir des valeurs finies, de plus, dans cet endroit, elles devraient être inférieures à l'unité compte tenu de la solution inertielle de Ritter. Dès lors, quelle que soit la viscosité du fluide, la solution visqueuse ne peut jamais

être la solution globale du problème. Il faut naturellement considérer l'inertie dans les petits instants après la rupture de barrage.

C-2 Etalement du front visqueux

Cette situation d'écoulement est donc valable après que la position arrière atteigne l'extrémité amont du réservoir. Dans ce cas la variation de la profondeur du fluide au bords amont devient notable et on fait apparaître l'influence de la longueur finie du réservoir. Les variables adimensionnelles les plus convenables pour cette situation d'écoulement sont désignées par le signe $\hat{\cdot}$ (équation (30), soit :

$$\left(\hat{h}, \hat{x}, \hat{t}\right) = \left(\frac{h}{H}, \frac{x}{L}, \frac{t}{T_L}\right) \text{ avec } T_L = (m+2) \left(\frac{2(m+1)}{m}\right)^m \frac{1}{Re_L^m (H/L)} \sqrt{\frac{H}{g}} \text{ et } Re_L = (H/L) Re_H \quad (\text{C- 14})$$

En fonction de ces variables adimensionnelles l'équation du mouvement (21) se réécrit :

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\left(-\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\hat{h}^{\frac{2m+2}{m}} \right) \right)^m \right] = 0 \quad (\text{C- 15})$$

Il est indispensable d'associer cette équation à l'expression qui traduit la conservation au cours du temps de la quantité initiale du fluide, i.e l'équation (22), soit en variable $\hat{\cdot}$:

$$\int_{-1}^{\hat{x}_f} \hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) d\hat{x} = 1 \quad (\text{C- 16})$$

Pour la résolution, nous chercherons des solutions affines de la forme :

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{h}(\hat{x} = -1, \hat{t}) X_2 \left(\eta = \frac{\hat{x} + 1}{\hat{x}_f(\hat{t}) + 1} \right) \quad (\text{C- 17})$$

où la variable η est définie dans ce cas dans l'intervalle $[0,1]$. Les fonctions $\hat{x}_f(\hat{t})$, $\hat{h}(\hat{x} = -1, \hat{t})$ et $X_2(\eta)$ sont obtenues par substitution directe dans les deux équations (C- 15) et (C- 16), il résulte :

$$\hat{x}_f(\hat{t}) = \hat{c}_f(m) \left[\hat{t} + \hat{c}_2 \right]^{\frac{1}{3m+2}} - 1 \quad (\text{C- 18})$$

$$\hat{h}(\hat{x} = -1, \hat{t}) = \frac{1}{a(m) (\hat{x}_f(\hat{t}) + 1)} \quad (\text{C- 19})$$

avec

$$a(m) = \int_0^1 X_2(\eta) d\eta ; \quad \hat{c}_f(m) = \left(\frac{(3m+2)}{a(m)^{2m+1}} \left(\frac{2(m+1)^2}{m(2m+1)} \right)^m \right)^{\frac{1}{3m+2}} \quad (\text{C- 20})$$

où \hat{c}_2 est une constante d'intégration, elle est nulle si nous négligeons l'histoire de l'écoulement. Les constantes $a(m)$ et $\hat{c}_f(m)$ peuvent être déterminées à partir de l'équation différentielle suivante:

$$-\left(\frac{m(2m+1)}{2(m+1)^2} \right)^m \frac{d}{d\eta} \left(\left(-\frac{d}{d\eta} \left(X_2^{\frac{2m+2}{m}} \right) \right)^m \right) + X_2 + \eta \frac{\partial X_2}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{C- 21})$$

Compte tenu des conditions aux limites : $X_2(0) = 1$ et $dX_2/d\eta = 0$ à $\eta = 0$, on obtient :

$$X_2(\eta) = \left(1 - \eta^{\frac{1+m}{m}}\right)^{\frac{m}{2m+1}} \quad (\text{C- 22})$$

Par commodité d'utilisation, nous proposons pour calculer $a(m)$ l'expression approchée suivante :

$$a(m) \approx \frac{2}{3} + \frac{0.297}{m+0.705} \quad \text{erreur} < 0.13\% \quad \text{si } m \geq 1 \quad (\text{C- 23})$$

D'autre part, en cherchant dans quelle condition la dérivée de \hat{h} par rapport \hat{t} est nulle, on aboutit aux résultats suivants :

Pour une station située en aval du barrage, la hauteur maximale $\hat{h}_{\max}(\hat{x})$ est donnée par :

$$\hat{h}_{\max}(\hat{x}) = \left(\frac{m+1}{3m+2}\right)^{\frac{m}{2m+1}} \left(\frac{2m+1}{3m+2}\right)^{\frac{m}{m+1}} \frac{1}{a(m)} (\hat{x}+1)^{-1} \quad (\text{C- 24})$$

Cette hauteur est atteinte à un temps $\hat{t}_{\max}(\hat{x})$ tel que :

$$\hat{t}_{\max}(\hat{x}) = \frac{1}{\hat{c}_f(m)^{3m+2}} \left(\frac{3m+2}{2m+1}\right)^{\frac{m(3m+2)}{m+1}} (\hat{x}+1)^{3m+2} - \hat{c}_2(m) \quad (\text{C- 25})$$

dont la position du front correspondante est :

$$\left(\hat{x}_f(\hat{t}_{\max})+1\right) = \left(\frac{3m+2}{2m+1}\right)^{\frac{m}{m+1}} (\hat{x}+1) \quad (\text{C- 26})$$

Remarquons maintenant que si on fait $\hat{x}_f(\hat{t} = 0) = 0$, on déduit à partir de l'équation (C- 18) la valeur de la constante $\hat{c}_2 = (1/\hat{c}_f(m))^{3m+2}$. A cet instant, la profondeur du fluide au bord amont du canal peut être déduite à partir de l'équation (C- 19), soit $\hat{h}(\hat{x} = -1, \hat{t}) = 1/a(m)$ qui est supérieure à la valeur admise 1 (condition initiale à vérifier impérativement). Si on fait $\hat{h}(\hat{x} = -1, \hat{t} = 0) = 1$, alors $\hat{x}_f(\hat{t} = 0) \approx (1 - a(m))/a(m)$. Par conséquent, cette solution est incapable de vérifier les conditions initiales de l'écoulement. D'où l'intérêt de l'analyse précédente «écoulement de la zone frontale visqueuse» lorsque $\hat{x}_f(\hat{t}) < (1 - a(m))/a(m)$.

Annexe D : Etat d'équilibre

L'une des propriétés des fluides viscoplastiques est leur arrêt local et instantané lorsque les contraintes mises en jeu sont inférieures à un seuil ($\sqrt{-T_{II}} \leq s$ dans notre cas où T_{II} est le deuxième invariant du tenseur des contraintes), cela dans l'hypothèse de non-glissement à la paroi. Dans ce cas, le tenseur des taux de déformations D devient nul et le fluide devrait donc s'arrêter. Une simple analyse consiste à supposer que l'arrêt se produit lorsque les contraintes pariétales se réduisent au seuil d'écoulement «arrêt au seuil d'équilibre statique». En tenant compte des contraintes élongationnelles, cette condition s'exprime sous la forme mathématique suivante (voir l'équation (11)):

$$-h_{,x} + \frac{s\phi}{\rho gh} h_{,x} = \frac{s}{\rho gh} \quad (\text{D- 1})$$

En introduisant les variables adimensionnelles $\hat{\cdot}$, on fait apparaître l'influence de deux nombres adimensionnels : le nombre d'Oldroyd 'Od' (équation (36), qui traduit l'influence du seuil de contrainte) et le nombre ϕ (équation (9), qui traduit l'influence des contraintes élongationnelles). En désignant \hat{h}_{stop} le profil de l'écoulement à l'équilibre et \hat{x}_{fstop} l'abscisse du front d'onde lors de l'arrêt, il vient en intégrant l'équation (D- 1) :

$$\phi \hat{h}_{stop} - \frac{\hat{h}_{stop}^2}{2} = Od \hat{x} + C \quad (\text{D- 2})$$

L'examen de cette équation montre qu'on devrait dans tous les cas avoir $\hat{h}_{stop} \geq \phi$, ce qui nous amène à définir, comme dans l'écoulement avec talus frontal, une profondeur non nulle à l'abscisse du front d'onde, soit $\hat{h}_{stop}(\hat{x} = \hat{x}_{stop}) = \phi_0 = \lambda \phi$ avec $\lambda \geq 1$. Avec cette condition au front l'équation (D- 2), il résulte :

$$\hat{h}_{stop} = \phi + \sqrt{(\lambda - 1)^2 \phi + 2Od(\hat{x}_{fstop} - \hat{x})} \quad (\text{D- 3})$$

On peut maintenant discuter les deux situations d'équilibre : Le blocage du fluide amont et l'arrêt.

D-1 Blocage du fluide amont

On devrait vérifier dans ce cas les deux expressions suivantes :

$$\int_{\hat{x}_{bstop}}^{\hat{x}_{fstop}} \hat{h}_{stop} d\hat{x} = -\hat{x}_{bstop} \quad \text{et} \quad \hat{h}_{stop}(\hat{x} = \hat{x}_{bstop}) = 1 \quad (\text{D- 4})$$

La première traduit la conservation du volume. Compte tenu de l'équation (D- 3), il résulte :

$$\hat{x}_{bstop}(Od, \phi) = -\frac{1}{3Od}(1 - \lambda\phi) \left[1 - \frac{3-2\lambda}{2}\phi(\lambda\phi + 1) \right] \quad (\text{D- 5})$$

et

$$\hat{x}_{fstop}(Od, \phi) = \frac{1}{6Od}(1 - \lambda\phi) [1 - \lambda\phi(2 + 2\lambda\phi - 3\phi)] \quad (\text{D- 6})$$

Il est clair que cette situation n'est valable que si $\hat{x}_{bstop} \geq -1$, soit compte tenu de l'équation (D- 5) :

$$Od \geq Od_c \quad \text{où} \quad Od_c = \frac{1}{3}(1 - \lambda\phi) \left[1 - \frac{3-2\lambda}{2}\phi(\lambda\phi + 1) \right] \quad (\text{D- 7})$$

D-2 Arrêt

Pour $Od < Od_c$, on est dans la situation d'arrêt. On devrait dans ce cas vérifier l'expression suivante :

$$\int_{-1}^{\hat{x}_{fstop}} \hat{h}_{stop} d\hat{x} = \hat{V}_0 = \frac{V_0}{HL} = 1 \quad (\text{D- 8})$$

où V_0 est le volume initial dans le réservoir (= HL dans notre cas)

On définit \hat{h}_{0stop} comme étant la profondeur du fluide à $\hat{x} = -1$ lors de l'arrêt, il résulte compte tenu des équations (D- 3) et (D- 8) :

$$\frac{1}{3} \hat{h}_{0stop}^3 - \frac{\phi}{2} \hat{h}_{0stop}^2 + \frac{\phi}{2} \phi^2 - \frac{1}{3} \phi^3 - Od \hat{V}_0 = 0 \quad (\text{D- 9})$$

Pour plus de simplifications, on introduit les paramètres suivants :

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{h}_{0stop}}{\phi} - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \lambda^2 + \lambda^3 + \frac{3Od \hat{V}_0}{\phi^3} \quad (\text{D- 10})$$

En remplaçant, l'équation (D- 9) devient :

$$H_0^3 - \frac{3}{4} H_0 - \omega = 0 \quad (\text{D- 11})$$

On obtient alors une équation implicite de deuxième ordre qui peut être approchée lorsque $\omega \gg 1$ ($\phi \ll 1$), comme suit :

$$H_0 \approx \omega^{1/3} \quad \text{ou} \quad \hat{h}_{0stop} \approx \frac{1}{2} \phi + \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \lambda^2 + \lambda \right) \phi^3 + 3Od \hat{V}_0 \right]^{1/3} \quad (\text{D- 12})$$

D'autre part, l'abscisse du front lors de l'arrêt peut être déterminée en remplaçant dans l'équation (D- 3) $\hat{h}_{stop} = \hat{h}_{0stop}$ et $\hat{x} = -1$, soit :

$$\hat{x}_{fstop}(Od, \phi) = \frac{1}{2Od} \left[\left(\hat{h}_{0stop} - \phi \right)^2 - (\lambda - 1)^2 \phi \right] - 1 \quad (\text{D- 13})$$

Lorsque $\phi \ll 1$, \hat{x}_{fstop} peut être approchée comme suit :

$$\hat{x}_{fstop} \approx \frac{1}{2Od} \left\{ \left[\left(\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \lambda^2 + \lambda \right) \phi^3 + 3Od \hat{V}_0 \right)^{1/3} - \frac{1}{2} \phi \right]^2 - (\lambda - 1)^2 \phi \right\} - 1 \quad (\text{D- 14})$$

Ainsi, l'état d'équilibre est parfaitement caractérisé (le blocage du fluide amont ainsi que l'arrêt). Il est possible d'évaluer le temps lors de l'arrêt en supposant qu'il correspond à l'intersection de la courbe théorique sans le seuil avec la droite d'arrêt ($x_f(t_{stop}) = x_{fstop}$).