

# **Écoulement uniforme et écoulement graduellement varié en régime laminaire**

## **I.1 Etude bibliographique**

Depuis longtemps, l'homme a cherché à comprendre les mécanismes physiques responsables du mouvement de l'eau dans la nature (rivières, canaux, nappes phréatiques, la mer, etc.). Les pistes sont nombreuses, le problème classique d'ingénierie étant d'évaluer le débit d'une rivière connaissant la hauteur de l'eau et les autres paramètres intervenant dans le mouvement (nature du sol, forme de la vallée, pente du cours d'eau). On a aussi besoin d'établir des formules qui permettent de calculer, pour un débit donné, le profil de la surface libre d'un cours d'eau. Ceci permet une première évaluation des zones successibles d'être inondées. Par analogie, l'homme a cherché également à établir des correspondances entre ces écoulements naturels et d'autres phénomènes physiques, même si leur aspect est complètement différent. Lorsque ces analogies font appel aux outils mathématiques caractérisant les phénomènes physiques, les résultats sont alors incontestables. En ce qui concerne les écoulements de l'eau dans les canaux en régime uniforme et permanent, il est bien connu depuis Stokes (1845) qu'ils sont analogues aux écoulements dans les conduites en régime établi. Ainsi, nous orienterons notre étude bibliographique à la fois sur les écoulements dans les conduites et sur les écoulements dans les canalisations. Nous nous intéressons exclusivement aux fluides indépendants du temps car bien que les fluides thixotropes soient d'une importance primordiale, il n'existe pas à l'heure actuelle beaucoup de travaux sur ces derniers (cf. Escudier & Presti 1995, Toure 1992). Ce fait n'est pas surprenant si on considère les difficultés du sujet, et le surdimensionnement des installations hydrauliques que l'on peut généralement observer. Soit par exemple un fluide qui doit être vidangé par l'intermédiaire d'une pompe. La pompe est généralement suffisamment puissante pour démarrer l'écoulement, donc surdimensionnée puisque la structure du fluide se désorganise sous l'effet du cisaillement et que le fluide thixotrope atteint un état d'équilibre (après que l'on a dépassé un certain temps critique) où il se comporte comme un simple fluide indépendant du temps. D'autre part, les expériences d'Ayadi (1996) avec un fluide thixotrope (Laponite) en écoulement à surface libre révèlent des phénomènes particuliers que l'hydraulique classique est incapable d'expliquer. Comme le fait que la profondeur du fluide, en écoulement uniforme, augmente avec la diminution du débit. Nous écartons également dans notre étude le

cas des fluides viscoélastiques. En définitif, nous considérons uniquement le cas des fluides visqueux ou viscoplastiques.

Notons enfin que les noms des chercheurs qui ne figurent pas dans la liste des références sont cités dans plusieurs grands ouvrages hydrauliques, tels que Bazin et Darcy (1863), Chow (1959), White (1974-1986), Carlier (1980-1986)...

### 1.1.1 Formules de perte de charge ; cas Newtonien

Depuis Chézy (1775), les ingénieurs ont cherché à établir une formule pratique qui donnerait la relation entre la perte de charge (qui représente le frottement), le débit et les autres éléments intervenant dans le mouvement de l'eau qui fut longtemps le seul intéressant l'ingénieur. C'est le succès de la similitude qui a permis d'établir la forme générale de la loi de frottement à travers le coefficient de perte de charge  $\Lambda$ . Ainsi, pour un fluide quelconque dans un ouvrage quelconque (canalisation en charge, écoulement à surface libre), la pente de frottement s'écrit :

$$J = \frac{\Lambda}{D_H} \frac{U^2}{2g} \quad (1)$$

$D_H$  est le diamètre hydraulique, dimension linéaire caractéristique d'une section transversale de l'ouvrage considéré (diamètre d'une canalisation, diamètre hydraulique de la section mouillée d'un écoulement à surface libre, etc.).  $g$  est l'accélération de la pesanteur.  $U$  représente la vitesse moyenne débitante dans la dite section transversale.  $\Lambda$  est le coefficient adimensionnel de perte de charge (dans la littérature on introduit aussi le coefficient de frottement désigné par la lettre  $f$  ou par  $C_f = \Lambda / 4$ ) qui est fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement  $Re$ , et de  $\varepsilon / D_H$ , la rugosité relative des parois de l'ouvrage ( $\varepsilon$  est la hauteur équivalente des rugosités des parois), soit :

$$\Lambda = f \left( Re, \frac{\varepsilon}{D_H} \right) \quad (2)$$

Dans le cas d'un écoulement à surface libre, la pente du canal  $I$  est l'homologue de  $J$ , et on peut s'attendre à un effet de pesanteur supplémentaire comme le nombre de Froude.

Le point de distinction entre toutes les formules empiriques, semi-empiriques ou analytiques proposées dans la littérature porte sur l'expression du coefficient de résistance  $\Lambda$ . Comme signalé plus haut, la première formule empirique a été obtenue par Chézy correspondant à  $\Lambda = C^2 / (8g)$  où  $C$  est une constante appelée coefficient de Chézy. C'est depuis les expériences de Coulomb, en 1800, qu'on a su que la rugosité de la paroi a

également une influence. A la suite, plusieurs autres formules différentes (établies dans les canaux ou dans les conduites en charge) ont été proposées. On peut citer par exemple les formules de Prony, Tadini, Ganguillet & Kutter, Darcy, Bazin, Blasius ( $\lambda = 0.316 Re^{0.25}$ ), Manning correspondant à  $C = Re^{1/6} / n$  où  $n$  est le coefficient de Manning, Strickler correspondant à  $n = 1/k$  où  $k$  est le coefficient de Strickler. Ces formules empiriques ont été établies d'après les résultats d'expériences réalisées avec de grands débits d'eau sur de grosses canalisations, mais dans un domaine assez limité. Elles ont été parfois employées, par la suite, dans tous les cas possibles, avec des extrapolations que ceux qui les utilisent ne soupçonnent même pas.

Le problème a été allégé par Reynolds, en 1883, qui fut le premier à définir le nombre adimensionnel  $Re$  portant son nom par la suite :

$$Re = \frac{\rho U D_H}{\mu} \quad (3)$$

où  $\rho$  et  $\mu$  représente respectivement la masse volumique et la viscosité du fluide. Dans les canaux,  $D_H$  est souvent remplacé par  $4h$  où  $h$  représente la profondeur maximale (ou moyenne) de l'écoulement. Les observations de Reynolds indiquent suivant la valeur du nombre  $Re$  la nature du régime d'écoulement : pour de faibles valeurs de  $Re$ , les faibles rugosités de la paroi n'ont pas d'influence et l'écoulement est laminaire ; pour  $Re$  assez grand, un mouvement aléatoire des particules se produit donnant naissance à un écoulement turbulent.

Dans les années trente, une contribution de plusieurs chercheurs (Prandtl, Nikuradse, Karman, Millikan...) a permis d'aboutir à une solution semi-empirique donnant, d'une part la répartition des vitesses locales (moyennes temporelles puisque celles-ci sont fluctuantes), d'autre part l'expression du coefficient de résistance  $\lambda$ . Ces solutions font appel aux résultats de la similitude et à un certain nombre de raisonnements semi-théoriques faisant intervenir un grand nombre de constantes. C'est grâce à l'expérience que ces constantes ont été évaluées. Ainsi,  $\lambda$  a été caractérisée selon différents régimes d'écoulement, en passant du régime laminaire (écoulement de Poiseuille) à l'écoulement turbulent hydrauliquement lisse (loi logarithmique ou Karman-Prandtl), et enfin à l'écoulement hydrauliquement rugueux (Nikuradse). Dans le cas des rugosités aléatoires, Colebrook propose pour le régime intermédiaire (Hydrauliquement lisse/Hydrauliquement rugueux) une relation composite (implicite) de telle sorte, pour  $Re$  petit, on tombe sur la loi logarithmique et pour  $Re$  grand, on a la formule de Nikuradse. Moody et Rouse récapitulent par la suite ces formules dans un

diagramme appelé usuellement diagramme de Moody qui représente le coefficient de résistance  $\lambda$  en fonction du nombre de Reynolds et la rugosité relative  $\varepsilon / D_H$ . Notons que même si d'autres formules ont été proposées dans la suite, les ingénieurs préfèrent toujours utiliser le diagramme de Moody. Ainsi, après un siècle et demi de recherches, le problème de l'écoulement de l'eau dans les conduites en régime établi a été maîtrisé.

Il faut noter cependant que ces relations ont souvent été établies dans des géométries circulaires ( $D_H = D$ ). Si la section de la conduite est quelconque, on fait appel au concept du diamètre hydraulique ( $D_H = 4S/P$  où  $S$  et  $P$  sont respectivement l'aire et le périmètre mouillée de la section), qui suppose que les lois établies dans les géométries circulaires restent valables en utilisant  $D_H$  en place de  $D$ . L'erreur commise par cette approximation est environ 40% dans le régime laminaire, et de 15% dans le régime turbulent (cf. White 1986 pp. 322). Une autre approximation, qui donne des résultats meilleurs que la première, a été proposée par Jones (1976). Il s'agit de l'approximation du diamètre laminaire qui revient à remplacer  $D = \lambda D_H$  où  $\lambda$  est un coefficient correcteur de non-circularité. Comme nous allons voir dans la suite, cette approximation a été proposée bien avant par Miller (1972), non pas pour l'évaluation des écoulements turbulents mais pour évaluer les écoulements laminaires avec les fluides complexes. Le coefficient  $\lambda$  peut être déterminé dans des conduites diverses à partir des solutions exactes relatives au cas laminaire : solutions analytiques de Boussinesq (1868) pour des sections planes et elliptiques, et beaucoup d'autres solutions données sous forme de séries par Berker (1963), White (1974), Zarling (1976), Burgess et Mahajerin (1987)...

Notons également que le passage du régime laminaire au régime turbulent est un problème qui n'est pas encore tout à fait résolu. Dans le diagramme de Moody, la transition se situe vers  $Re = 2400$  car on considère le cas des écoulements perturbés. En laboratoire, on a pu atteindre en effet des valeurs du nombre  $Re$  de l'ordre  $10^5$  en restant laminaire (avec des conduites très lisse et exemptes de vibrations). Précisons toutefois que dans les conduites usuelles,  $Re_c$  est rarement supérieur à 4000 ( $Re_c$  est le nombre de Reynolds lors de la transition).

D'autre part, un nombre considérable d'études a été consacré aux pertes de charge dans les canalisations, qui devrait avoir pour conséquence de chercher dans quelle mesure ces formules universelles (Prandtl, Nikuradse, Colebrook...) pourraient s'appliquer aux écoulements à surface libre (Thijssen 1949, Powell 1950, Crump 1956 cités par Carlier 1980). La formule de Crump se déduit immédiatement de la formule de Colebrook en y introduisant

le coefficient de Chézy  $C$  à la place du coefficient de résistance  $\Lambda = C^2 / (8g)$ . Donc cette formule de Crump s'applique aussi bien aux canalisations en charge, qu'aux écoulements à surface libre. Mais d'une manière générale, l'utilisation de ces formules universelles rencontre bien des oppositions de la part de nombreux hydrauliciens qui préfèrent les formules classiques de Bazin, Manning, Strickler, etc. Selon un extrait de l'article de Vadot (1954), les formules établies pour les conduites ne peuvent pas être appliquées brutalement aux canaux. Des expériences effectuées par Varwick dans des canaux, dont les parois, comme Nikuradse, étaient recouvertes de rugosités artificielles, montrent la même allure que celles des courbes de Nikuradse. Toutefois, il se situe nettement au-dessus de la courbe de l'écoulement lisse. En outre, la transition et le passage au régime rugueux se produisent pour des nombres de Reynolds plus grand en canal qu'en conduite. Vadot explique cela par les déformations de la surface libre et par l'influence de l'encombrement des rugosités qui conduit à sous-estimer le périmètre mouillé. D'autres auteurs font observer que les écarts ont pour cause l'existence d'une surface libre qui a, sur l'écoulement, un effet de tranquillisant provoqué par le frottement entre l'air et le liquide (Carlier 1980) et d'autre introduit l'effet de la tension superficielle (cf. Bartolini 1977). On laisse de côté ces problèmes et signalons pour finir que les expériences réalisées dans la littérature ont montré que les écoulements uniformes dans les canaux changent du laminaire au turbulent dans le domaine  $Re$  variant entre 2000 à 50000 (cf. Chow 1959 pp.8) suivant la rugosité des parois.

### 1.1.2 Formules de perte de charge : Fluides complexes

#### Dans les conduites

Dans la nature et dans l'industrie, les écoulements qui traitent les ingénieurs sont très fréquemment inertiels et turbulents. Mais en fluide complexe, on a souvent affaire à des fluides nettement épais et cette tendance est beaucoup moins prononcée. C'est la raison pour laquelle la littérature relative à ces fluides complexes insiste particulièrement sur le cas des écoulements laminaires.

Et alors que pour le cas Newtonien, il existe un grand nombre de solutions analytiques en régime laminaire, cela n'est pas le cas pour les fluides complexes. Seulement quelques solutions exactes (sections possédant des symétries axiales) sont obtenues pour l'écoulement de Poiseuille dans les conduites circulaires, ou entre deux plans parallèles, et dans les conduites annulaires (cf. Skelland 1967, Midoux 1993). Ces solutions analytiques peuvent être déduites à partir de la relation de Rabinowitch qui s'exprime indépendamment de la loi de comportement du fluide et dans l'hypothèse de non glissement à la paroi, comme suit :

$$U = \frac{D_H}{2\tau_w} \int_0^{\tau_w} \tau^2 f(\tau) d\tau \text{ pour une section circulaire, et } U = \frac{D_H}{4\tau_w} \int_0^{\tau_w} \tau f(\tau) d\tau \text{ pour un plan (4)}$$

$U$  est la vitesse débitante.  $D_H = D$  dans une section circulaire de diamètre  $D$  et  $D_H = 4H$  dans un plan dont la demi-hauteur est  $H$ .  $\tau_w = (D_H/4)J$  est la contrainte tangentielle à la paroi. Si la loi de comportement du fluide est  $\tau = \tau(\dot{\gamma})$ ,  $f(\tau)$  est la fonction inverse telle que  $\dot{\gamma} = f(\tau)$ . La première difficulté est de pouvoir représenter la fonction  $f(\tau)$ . Ensuite, il reste le problème de pouvoir exprimer les intégrales intervenant dans l'.

Les profils de vitesse peuvent être également obtenus analytiquement pour tous les cas particuliers cités plus haut. Si le fluide possède un seuil de contrainte, deux zones d'écoulements sont mises en évidence : une zone rigide caractérisée par une vitesse constante ou nulle, et une zone en déformation.

Pour des géométries plus complexes, quelques problèmes ont été résolus numériquement (cf. Skelland 1967 pour un modèle d'Ostwald, Walton & Bittleston 1991, Beverly & Tanner 1992, Huilgol & Panizza 1995 et Taylor & Wilson 1997 pour un modèle de Bingham) ou alors analytiquement par approximations successives (Lobek & al 1979 et Walton & Bittleston 1991). Le problème traité par Lobek & al (1979) est celui d'une section rectangulaire et d'un fluide ayant un comportement d'Ostwald (loi de puissance) avec un indice de rhéofluidification voisin de 1. Tandis que Walton & Bittleston (1991) se sont intéressés au cas d'une section annulaire décentrée avec un modèle de Bingham. Il existe également des méthodes approximatives simples pour déterminer la relation existante entre le débit et la perte de charge dont la section ne possède pas de symétrie axiale, comme la méthode du diamètre laminaire proposée par Miller (1972). L'auteur recommande l'utilisation de cette méthode pour tous les fluides complexes indépendants du temps.

Il existe néanmoins quelques études réalisées dans le cas turbulent, comme pour caractériser la transition laminaire/turbulent. Evidemment cela n'est pas une tâche facile, car même dans le cas Newtonien le problème est toujours posé. La première difficulté est de pouvoir présenter pour chaque loi de comportement un ensemble de variables adimensionnelles, par exemple de faire apparaître un nombre de Reynolds spécifique pour chaque loi. Dans ce cadre, on peut citer la méthode d'Hedström (1952) pour un modèle de Bingham. L'auteur définit le nombre de Reynolds comme dans le cas Newtonien mais en remplaçant seulement la viscosité  $\mu$  par la consistance du fluide  $k$ , tandis que le nombre de Bingham est défini comme suit :

$$Bm = \frac{sD}{kU} \quad (5)$$

où  $s$  est le seuil de contrainte. Selon Hedström la transition laminaire/turbulent intervient en principe à l'intersection de la courbe iso-Bm convenable avec la courbe générale obtenue pour l'écoulement turbulent des fluides de comportement Newtoniens (Diagramme de Moody).

D'autre part, Metzner & Reed (1955) ont proposé une méthode générale de corrélations adimensionnelles des pertes de pression en conservant la définition du coefficient de frottement  $\Lambda$  (1). Ils définissent une viscosité apparente  $\mu_c$  de contrainte tangentielle à la paroi  $\tau_w$  au paramètre caractéristique de l'écoulement  $(8U/D)$  et un nombre de Reynolds généralisé  $Re_g$  défini à partir de  $\mu_c$  (en remplaçant dans l'équation (3)  $\mu$  par  $\mu_c$ ). Ils donnent ainsi pour tous les fluides les relations suivantes :

$$\Lambda = \frac{64}{Re_g} \quad \text{avec} \quad Re_g = \frac{\rho UD}{\mu_c} \quad \text{et} \quad \mu_c = k_c \left( \frac{8U}{D} \right)^{n_c-1} \quad (6)$$

Les expressions de  $k_c$  et  $n_c$  peuvent être obtenus en dérivant la loi de Rabinowitch par rapport à  $\tau_w$ , il vient pour une section circulaire :

$$n_c = \frac{d(\ln(\tau_w))}{d(\ln(8U/D))} \quad \text{et} \quad k_c = \frac{\tau_w}{(8U/D)^{n_c}} \quad (7)$$

Notons que ces relations ne peuvent être exactement vraies que pour un fluide ayant un comportement en loi de puissance. Dans ce cas  $n_c = n$  et  $k_c = k((3n+1)/4n)^n$  sont des constantes qui définissent le nombre de Reynolds généralisé (attribué dans certain ouvrage à Bird), comme suit :

$$Re_g = Re_B = \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^n \frac{\rho U^{2-n} D^n}{8^{n-1} k} \quad (8)$$

Metzner & Reed (1955) ont corrélé un grand nombre de résultats de la littérature sous la forme  $\Lambda/8$  ( $f/2$ ) en fonction de  $Re_g$  et ils constatent que l'écoulement est laminaire si  $Re_g < 2100$ , donc comme dans le cas Newtonien.

De plus, par un raisonnement analogue à celui de Karman-Prandtl (loi logarithmique), Dodge & Metzner (1959), Tomita (cité par Midoux 1993) et Edwards & Smith (1980) ont établi des relations pour le régime hydrauliquement lisse. Tomita considère des fluides qui suivent les lois de Bingham et Ostwald. Edwards & Smith (1980) proposent simplement de généraliser la relation de Karman-Prandtl en remplaçant la viscosité par la viscosité apparente

à la paroi déterminée suivant l'analyse de Metzner & Reed (1955). Et puis, Dodge & Metzner (1959) proposent à partir d'un grand nombre d'expériences la formule empirique suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \approx \frac{2}{n^{0.75}} \log \left( \frac{1}{2^{2-n}} Re_B \Lambda^{1-\frac{n}{2}} \right) - \frac{0.2}{n^{1.2}} \quad (9)$$

Cette formule a été établie pour un modèle d'Ostwald, mais celle-ci est recommandée par Dodge & Metzner (1959) pour tous les fluides indépendants du temps en utilisant le nombre de Reynolds  $Re_g$  et l'indice d'écoulement  $n_c$  en place de  $Re_B$  et  $n$ .

D'autres part, des travaux effectués par Dodge & Metzner (1959) montrent que les relations de Colebrook (pour la transition) et Nikuradse (pour le régime hydrauliquement rugueux) conviennent pour les fluides complexes avec des coefficients dépendant de  $n_c$ . En l'absence de détermination précise de ces coefficients, Metzner & Reed recommandent l'utilisation de la relation de Colebrook pour les fluides pseudo-plastiques.

### Dans les canaux

Jusqu'à présent on a seulement cité les principaux travaux réalisés dans les conduites en charge en régime établi, et comme dit plus haut la ressemblance entre ces écoulements et les écoulements dans les canaux en régime uniforme est fondée mathématiquement. D'ailleurs toutes les solutions analytiques proposées dans la littérature sont issues de la relation de Rabinowitch (Paslay & Slibar 1958, Howard 1963, Astarita & al 1964, Matsuhisa & al 1965, Kozicki & Tiu 1967, Sestak 1974, De Kee 1990...) et leur expression est analogue à celle établie dans les conduites. Elles se limitent seulement aux cas des sections présentant une symétrie axiale. Ainsi, à partir d'une analyse analogue à celle de Metzner & Reed (1955), Kozicki & Tiu (1967-1986) ont proposé une méthode approximative générale pour la détermination du débit moyen et la vitesse maximale d'un écoulement à travers un canal (recommandée également pour les conduites) de section arbitraire, sans aucune spécification de la loi de comportement. Dans cette méthode, ils introduisent deux paramètres géométriques  $a_1$  et  $a_2$  déterminés expérimentalement avec un fluide de comportement Newtonien puis supposés rester valables pour tous les fluides complexes indépendants de temps. Ces paramètres sont respectivement  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{3}{4}$  pour une forme semi-circulaire et  $\frac{1}{2}$  et 1 pour un plan incliné.

$$\dot{\gamma}_w = a_1 \tau_w \frac{d \left( \frac{8U}{D_H} \right)}{d\tau_w} + a_2 \left( \frac{8U}{D_H} \right) \quad (10)$$

$\dot{\gamma}_w$  est le gradient de vitesse à la paroi. Les autres paramètres sont déjà définis plus haut. Dans ce cas la contrainte de cisaillement à la paroi égale à  $\tau_w = (D_H/4)\rho g \sin(\theta)$  où  $\theta$  est la pente du canal. Johnson (1970), de son côté, a présenté des résultats expérimentaux d'écoulement à surface libre pour les argiles. Il a considéré que ces derniers ont une loi de comportement de Bingham. Il a présenté une méthode numérique pour déterminer la distribution de vitesse et de contrainte dans un canal rectangulaire et semi-elliptique. D'autre part, en se basant sur les solutions exactes de ce problème (plan infini et section demi-circulaire), Coussot (1994) propose pour un modèle d'Herschel-Bulkley de trouver pour chaque type de section, une fonction  $f$  telle que :

$$\frac{s}{k} \left( \frac{h_{\max}}{U} \right)^n = f \left( \frac{\rho g \sin(\theta)}{s}, a_1, a_2, \dots \right) \quad (11)$$

où  $(a_1, a_2, \dots)$  sont des paramètres supposés indépendants des paramètres rhéologiques du fluide, donc ils dépendent seulement de la forme de la section du canal.  $h_{\max}$  est la profondeur maximale du fluide. Coussot (1994) a aussi présenté des résultats d'expériences à la fois dans des canaux trapézoïdaux et rectangulaires. Les données ont été comparées à la théorie du canal infiniment large. Les meilleurs résultats ont été obtenus pour  $h/b < 0.1$  où  $h$  est la profondeur du fluide et  $b$  est la largeur du canal. L'erreur maximale obtenue est alors inférieure à 30%, mais elle dépasse 60% pour  $h/b > 0.1$ . En plus des erreurs liées aux mesures rhéométriques, cet écart est dû certainement aux effets non négligeables des bords.

En outre, pour évaluer la transition laminaire/turbulent, Qian & Wan (1986) définissent pour le modèle de Bingham le nombre de Reynolds suivant, rapport des contraintes inertielles aux contraintes viscoplastiques :

$$\frac{1}{Re_B} = \frac{1}{Re_t} + \frac{1}{Re_\mu} \quad (12)$$

où  $Re_t = 8\rho U^2/s$  et  $Re_\mu = \rho U D_H/\mu$ . Selon Qian & Wan (1986), le régime est laminaire pour  $Re_B < 2100$ . Liu & Mei 1990 montrent que la transition est dans le domaine  $Re_B = 2000 - 3000$ . Kessel & Kranenburg (1996) confirment ces résultats.

Pour finir, signalons que le phénomène des trains d'ondes en rouleaux, généralement observé avec l'eau en régime fluvial (voir par exemple Mayer 1961 et Julien & Hartley 1986), a également été observé avec les suspensions boueuses (Wang et al 1993, Coussot 1994 et d'autres). Pour proposer un critère de stabilité de ces écoulements uniformes, Coussot (1994) utilise l'approche de Trowbridge (1987).

### I.1.3 Écoulement graduellement varié

Dans un canal dont la pente, la section, la rugosité et le débit sont constants, c'est toujours le régime uniforme qui finit par s'établir loin des extrémités. Les pertes par frottement dans ce régime sont entièrement compensées par la pente du fond. La présence d'une singularité (rétrécissement, élargissement, discontinuité de la pente ou de la rugosité du fond...) provoque non seulement une perte localisée d'énergie, comme dans les écoulements en charge, mais aussi une modification de la surface libre. Le régime est alors différent du régime uniforme. On l'appelle le régime varié ; graduellement varié si les caractéristiques hydrauliques ne changent que très lentement d'une section à l'autre et rapidement varié si on constate une évolution rapide, ou discontinue, des caractéristiques du mouvement, comme dans le ressaut hydraulique. Quand les vitesses croissent dans la direction de l'écoulement, celui-ci est dit accéléré, quand elles diminuent, l'écoulement est retardé. Les écoulements rapidement variés occupent une zone relativement courte. Les plus importants sont le ressaut hydraulique, la chute brusque et les contractions. Les écoulements graduellement variés se produisent parfois sur des distances importantes et conduisent aux formes de la surface libre appelées courbes de remous. La formule fondamentale reliant la courbe de remous aux autres paramètres de l'écoulement a été proposée, en 1828 presque en même temps, par Bélanger et par Poncet (on peut consulter Bazin 1863). Elle a été donnée sous forme intégrale et c'est grâce à Bazin (1863) que celle-ci a été transformée en dérivée totale, comme elle est connue actuellement :

$$\frac{dh}{dz} = \frac{I - J}{1 - \beta \frac{Q^2}{gS^3}} \quad (13)$$

où  $h$  est la profondeur du fluide,  $I$  la pente du fond,  $J$  représente la pente de frottement,  $\beta$  est un coefficient de forme qui tient compte de la répartition non-uniforme de la vitesse dans la section transversale,  $S$  est la section mouillée,  $z$  indique l'abscisse dans la direction de l'écoulement, et  $Q = US$  est le débit volumique traversant le canal. Dans la littérature la pente du fond  $I$  et le frottement  $J$  sont parfois désignés par  $S_0$  et  $S_f$ , respectivement.

Notons que l'équation (13) peut être également déduite à partir du modèle de Saint-Venant (1871). Le terme représentant le frottement 'J' est évalué à partir des relations établies en régime uniforme, qui fournit une bonne approximation lorsque les caractéristiques de l'écoulement varient faiblement. Naturellement cette approximation est remise en cause si l'écoulement possède des discontinuités ou des variations rapides. Il est bien de signaler que

dans cette formule la pente du canal est supposée assez faible pour que  $\sin(\alpha) \approx \alpha = I$  et que  $\cos(\alpha) \approx 1$ , ce qui est le cas dans la majorité des cours d'eaux naturels de plaine.

Bazin (1863) insiste sur l'intérêt de connaître la valeur du nombre  $\beta Q^2 / (gS^3)$  (c'est le nombre de Froude introduit dans ce problème dans la suite) qui intervient dans le dénominateur de l'équation de mouvement. Il partage ainsi l'écoulement en deux catégories suivant que ce nombre est plus petit ou plus grand que l'unité. Des classifications plus rigoureuses ont été utilisées dans la suite suivant le signe de dénominateur et numérateur de l'équation du mouvement. Pour un débit et section donnée, on définit la hauteur normale  $h_n$  comme la hauteur pour laquelle la pente du fond égale à la pente de frottement (numérateur égal 0), tandis que la hauteur critique  $h_c$  (indépendante de la pente du fond) est définie comme la hauteur pour laquelle le nombre de Froude  $Fr^2 = \beta Q^2 / (gS^3) = 1$  (dénominateur égal 0). La pente critique  $I_c$  (ou désignée également par  $S_c$  dans la littérature) est la pente à donner au canal pour que  $h_c = h_n$ . En premier lieu, le cours d'eau est classé suivant qu'il est horizontal, à contre pente ou à pente positive. Pour ce dernier cas, le cours d'eau a été également classé suivant que  $I$  est inférieure, égale ou supérieure à  $I_c$  (régimes appelés respectivement fluvial, critique et torrentiel). Les régimes d'écoulement diffèrent suivant que l'écoulement est accéléré, retardé ou uniforme critique. Pour reconnaître la nature du régime d'écoulement, il suffit de comparer les profondeurs du fluide aux deux hauteurs caractéristiques  $h_n$  et  $h_c$ . Pour plus de renseignements sur ces différentes classifications ainsi que les formes possibles du profil de la surface libre en régime graduellement varié, nous envoyons les lecteurs à l'ouvrage de Chow (1959), pp. 220-244.

Le calcul et la construction exacts du profil de la surface libre nécessitent la résolution de l'équation différentielle du mouvement (13). Dans la littérature, plusieurs méthodes de résolutions ont été utilisées :

- Méthode de Bakhmeteff
- Méthode par approximations successives
- Méthode graphique de Raytchine
- Méthode de Silber
- Méthode de Bresse

Mais quel que soit le procédé de calcul utilisé, le résultat ne donnera l'équation de la ligne de la surface libre qu'à une constante près. Et il faudra obligatoirement connaître l'un de ses points ; celui-ci, appelé point de repère, désigné par  $h_0$ . Le point de repère est également

appelé "section de contrôle", il dépend de la singularité responsable de l'écoulement varié. En général, ce point est calculé séparément de l'écoulement à l'endroit même de la singularité, car c'est ici qu'un changement du régime d'écoulement se produit correspondant plus généralement à  $Fr = 1$  (qui donne la hauteur critique représentant l'énergie minimale de l'écoulement). Mais, comme au voisinage des singularités le régime est brusquement varié, cette hauteur théorique ne correspond jamais à la réalité. Ainsi, on fait souvent appel à des lois semi-empiriques telles que la loi de déversoir, du ressaut hydraulique...

D'autre part un certain nombre d'études ont été réalisées, qui devraient avoir pour conséquence de chercher dans quelles conditions le modèle classique peut être valable pour étudier l'écoulement graduellement varié avec des fluides complexes. Martinet (1992) s'est intéressé à l'extension des équations de Saint-Venant aux écoulements de fluide de comportement de Bingham. Il remplace les contraintes normales par la pression hydrostatique seulement. De même Coussot (1994) a étudié des écoulements à surface libre de suspensions boueuses concentrées. Dans ce travail, il introduit les paramètres rhéologiques exacts du fluide. Pour les écoulements graduellement variés, Coussot utilise l'approximation classique qui suppose que la contrainte à la paroi égale à celle d'un écoulement uniforme pour le même débit et la même profondeur du liquide. De plus, il considère que les effets des contraintes normales sont égaux à la pression hydrostatique. De son côté, Ayadi (1996) a présenté des résultats expérimentaux sur des écoulements permanents (uniforme et graduellement variés) de fluides à propriétés temporelles (Laponite) dans des canaux rectangulaires. Ayadi insiste sur l'invalidité du modèle classique de mouvement graduellement varié pour définir la profondeur critique. Piau (1996) étend l'expression classique de Saint-Venant aux écoulements stables des fluides à seuil, en tenant compte de la contribution des contraintes normales due au seuil de contrainte. Cela permet d'expliquer le phénomène de bombement de la surface des écoulements naturels de fluides à seuil de contrainte. Ce nouveau modèle de Piau prédit une hauteur critique différente de celle de l'hydraulique classique. Le présent chapitre vient à la suite du travail théorique de Piau.

## 1.2 Délimitation du problème

Après avoir consulté la littérature relative aux principaux travaux réalisés, on est amené à dire que l'écoulement de l'eau est assez bien maîtrisé. Un certain nombre d'études scientifiques ont été également menées avec des fluides complexes. Il apparaît cependant un manque de :

- mesures précises de vitesses locales, pour l'écoulement graduellement varié aussi bien que

pour l'écoulement uniforme ;

- volonté pour tenir compte des contraintes élongationnelles, bien que ces effets n'ont jamais été remis en cause dans ce problème. Au contraire, ils permettent peut être d'expliquer le phénomène de bombement de la surface libre des écoulements naturels ;
- de précisions sur les effets des bords du canal qui permettent de se placer dans l'hypothèse généralement admise dans la littérature où on considère que le canal est infiniment large.

Notre motivation est donc de progresser plus dans la compréhension de ces écoulements permanents avec des fluides complexes. Nous considérons exclusivement des fluides ayant un comportement d'Herschel-Bulkley. Ce modèle présente l'avantage de mieux représenter les laves torrentielles dans une large gamme de gradient de vitesse.

Sur le plan théorique, nous sommes en parfait accord avec l'idée d'établir une correspondance entre les écoulements à surface libre et les écoulements dans les conduites. Certes, dans certaines conditions la présence de la surface libre change les conditions aux frontières de l'écoulement à surface libre et cette analogie peut perdre ainsi un peu de sa validité. Il faut reconnaître cependant que les formules théoriques donnent le plus souvent, même avec des simplifications, une bonne estimation du phénomène à l'échelle réelle (surtout dans un problème comme celui-ci où plusieurs paramètres rentrent en jeu). Les formules empiriques, dans tous les cas, ne représentent que la réalité du domaine expérimental assez limité dans lequel elles ont été établies.

Compte tenu de cette hypothèse, nous commençons ce chapitre par une présentation rationnelle des solutions analytiques de la littérature relatives à l'écoulement laminaire et uniforme (cette présentation produite ici en I.3 a été réalisée initialement par Piau dans une note interne au laboratoire). Puis, nous estimerons le coefficient de résistance dans une section quelconque. Les approximations sont supposées valables qu'il s'agisse de conduites en charge ou de canaux à surface libre, mais l'application réalisée ici concerne l'écoulement à surface libre.

Nous aborderons dans la suite l'écoulement graduellement varié. Nous représenterons le modèle de Piau (1996) qui sera développé, en donnant une loi de frottement de type laminaire. Et nous terminerons ce chapitre par la comparaison de nos mesures aux prédictions théoriques.

### I.3 Régime uniforme

Le régime d'écoulement est dit uniforme lorsque la hauteur et la vitesse débitante sont indépendantes de l'abscisse. Il en résulte que la surface libre est un plan parallèle au fond du

canal et que le frottement visqueux est entièrement compensé par la pente du canal, soit :

$$\sin(\theta) = I = J \quad (14)$$

### 1.3.1 Correspondance entre les écoulements dans les conduites et les écoulements dans les canaux en régime uniforme

Selon Stokes (1845), dans l'écoulement permanent des fluides incompressibles de comportement Newtonien, il existe un rapport entre l'écoulement dans un canal en régime uniforme et l'écoulement dans la conduite (en charge) en régime établi. La répartition de vitesse le long d'une section perpendiculaire à l'axe de l'écoulement est la même dans les deux cas dans la mesure où la surface mouillée du canal peut être déduite de la section globale de la conduite par une coupe symétrique dont l'axe de symétrie est le plan de la surface libre (figure 1), et que l'angle d'inclinaison du canal  $\theta$  satisfait l'équation suivante :

$$\sin(\theta) = \frac{F}{\rho g} = J \quad (15)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $g$  est l'accélération de gravité, et  $F$  est la chute de pression par unité de longueur de la conduite :

$$F = \frac{\Delta P_g}{L} \quad (16)$$

La raison de cette similitude est mathématique, car les deux écoulements sont gouvernés par la même équation du mouvement. De plus, en négligeant dans le canal l'effet de la tension superficielle et le frottement visqueux entre l'air et le liquide, les conditions aux frontières de ces deux écoulements seront également identiques.

#### *Remarque*

Selon la relation de Laplace (la différence de contraintes normales à l'interface air-liquide est inversement proportionnelle au rayon de courbure de l'interface), la tension superficielle ne devrait pas avoir donc une influence dans l'écoulement uniforme, car ici le rayon de courbure tend vers l'infini. Cependant, ceci suppose également que le comportement dynamique de l'interface est identique au comportement du fluide à l'intérieur de l'écoulement. Quelques auteurs mettent en cause cette dernière hypothèse et supposent l'existence au voisinage de la surface libre d'une couche mince de fluide ayant un comportement mécanique différent de celui du fluide intérieur. Ceci afin d'expliquer pour quoi dans les canaux ordinaires les vitesses maximales sont mesurées au-dessous de la surface à une distance de  $0.05h$  à  $0.25h$  où  $h$  est la profondeur du fluide (cf. Chow 1959 pp. 24). Contredisant ainsi la théorie qui prédit des vitesses maximales à la surface libre. Bartolini

(1977) introduit dans le problème un modèle développé dans la littérature pour représenter le comportement dynamique de l'interface.

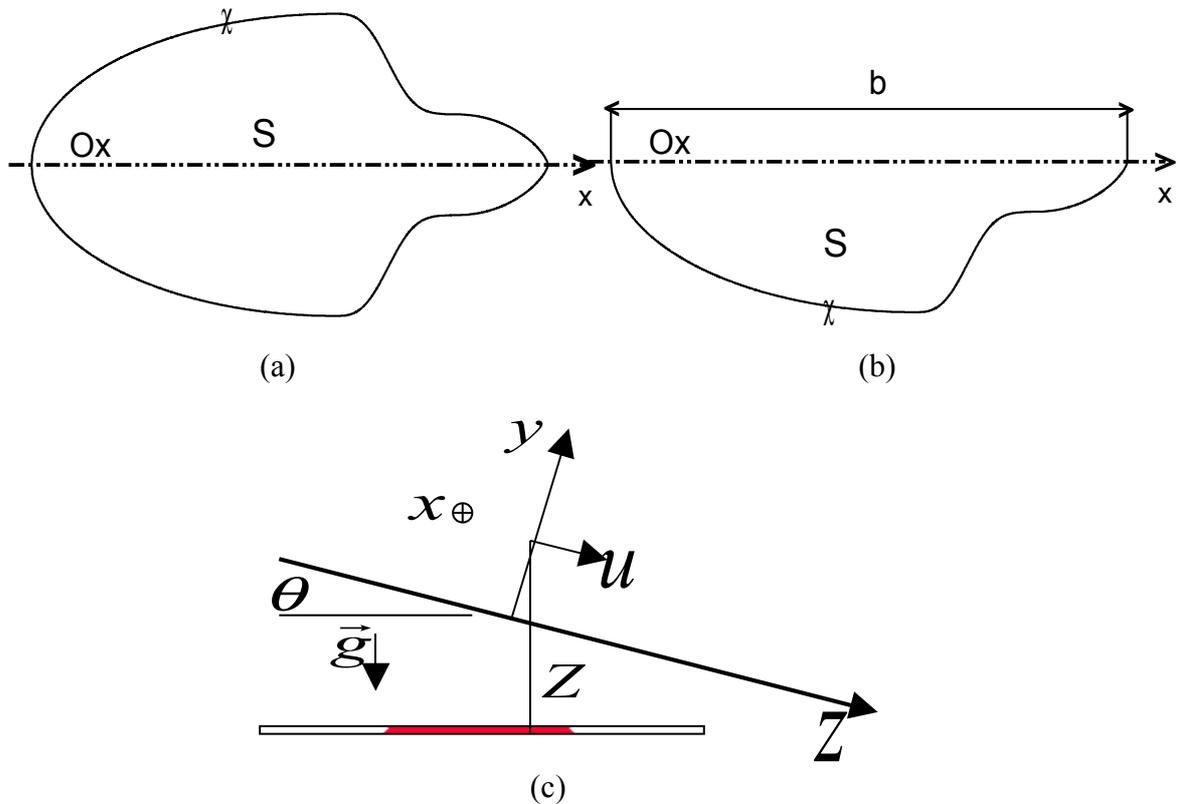


Figure 1: Système de coordonnées et correspondance entre les écoulements à surface libre en régime uniforme et les écoulements dans les conduites en régime établi  
 (a) section du canal de largeur  $b$ , de section mouillée  $S$  et de périmètre mouillé  $\lambda$   
 (b) la section similaire dans une conduite de section mouillée  $S$  et de périmètre mouillé  $\lambda$   
 (c) les constituants du canal et de la conduite

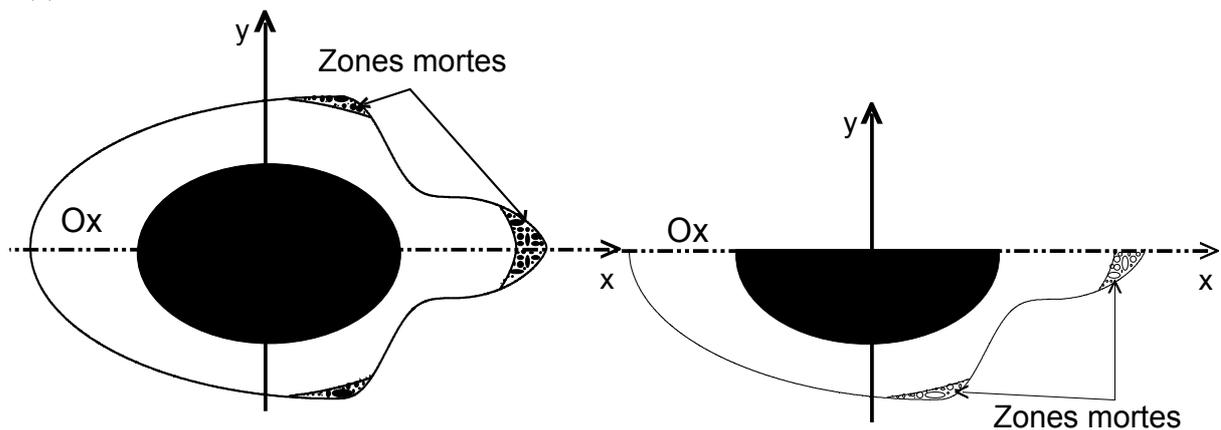


Figure 2: Différentes zones d'écoulement en régime uniforme (canal) et en régime établi (conduite)

Numériquement l'auteur résout les équations de mouvement et fait une comparaison avec l'expérience. L'accord est satisfaisant, mais il faut signaler cependant le peu de résultats

expérimentaux représentés par l'auteur, limité à un seul profil de vitesses seulement.

En faisant abstraction à ces effets de la tension superficielles, les mêmes correspondances peuvent être généralisées aux fluides visqueux ou viscoplastiques dont le déviateur du tenseur de contrainte  $\mathbf{T}$  est le produit du tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$  par une fonction  $\eta$ . Cette dernière (appelée la viscosité absolue) dépend du deuxième ( $D_{II}$ ) et du troisième ( $D_{III}$ ) invariant du tenseur des taux de déformation, soit :

$$\mathbf{T} = 2\eta(D_{II}, D_{III})\mathbf{D} \quad (17)$$

avec  $D_I = 0$  et  $D_{II} = -tr(\mathbf{D}^2)/2$

Plusieurs modèles peuvent être déduits à partir de l'équation (17), ils ont été formulés par JG Oldroyd et N. Prager (JC) :

- Modèle Newtonien :

$$\eta(D_{II}, D_{III}) = \mu \quad (18)$$

- Modèle d'Ostwald (loi de puissance) :

$$\eta(D_{II}, D_{III}) = k(-4D_{II})^{\frac{n-1}{2}} \quad (19)$$

- Modèle de Bingham :

$$\eta(D_{II}, D_{III}) = k + \frac{s}{(-4D_{II})^{\frac{1}{2}}} \quad \text{si } \sqrt{-T_{II}} > s \quad (20)$$

- Modèle d'Herschel Bulkley :

$$\eta(D_{II}, D_{III}) = k(-4D_{II})^{\frac{n-1}{2}} + \frac{s}{(-4D_{II})^{\frac{1}{2}}} \quad \text{si } \sqrt{-T_{II}} > s \quad (21)$$

L'écoulement est permanent et uniforme, donc :

$$u = 0 ; v = 0 ; w = w(x, y) \quad (22)$$

qui permet de déduire :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & w_{,x} \\ 0 & 0 & w_{,y} \\ w_{,x} & w_{,y} & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Compte tenu des équations de Cauchy, il résulte :

$$\begin{cases} (\eta w_{,x})_{,x} + (\eta w_{,y})_{,y} = -F & \text{dans la zone en déformation} \\ w = 0 & \text{le long de la paroi} \end{cases} \quad (24)$$

qui permet d'établir l'analogie entre l'écoulement à surface libre et l'écoulement dans une conduite. La résolution de l'équation (24) dans un canal dont l'axe x est d'origine la surface libre, permet en respectant la symétrie par rapport à (Ox) de déduire la solution de ce

problème dans une conduite, et vis versa. Dans la littérature (cf. Taylor & Wilson 1997, Saramito & Piau), des zones mortes dans les coins et le noyau central en translation rigide sont mises en évidence (figure 2). La région rigide (appelée encore région bouchon) est caractérisée par une vitesse constante. Les zones mortes ont des vitesses nulles. Dans le reste de l'écoulement, la vitesse est caractérisée par une variation graduelle.

### Similitude

Les équations du mouvement (24) ainsi que les conditions aux limites peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_{zx,x} + T_{zy,y} = -F & \text{dans } S \\ w = 0 & \text{sur } \chi \\ \left( \begin{array}{l} T_{zx} \\ T_{zy} \end{array} \right) = \left( k(w_{,x}^2 + w_{,y}^2)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{s}{(w_{,x}^2 + w_{,y}^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \left( \begin{array}{l} w_{,x} \\ w_{,y} \end{array} \right) & \text{si } \sqrt{T_{zx}^2 + T_{zy}^2} > s \\ w_{,x} = w_{,y} = 0 & \text{si } \sqrt{T_{zx}^2 + T_{zy}^2} \leq s \end{array} \right. \quad (25)$$

Ce système d'équations peut être adimensionnalisé en choisissant  $D_H$  comme une référence des longueurs,  $(D_H^{n+1}F/(32k))^{1/n}$  pour les vitesses et  $(D_H F)/4$  pour les contraintes où  $D_H$  est le diamètre hydraulique :

$$D_H = \frac{4S}{\chi} \quad (26)$$

Les quantités adimensionnelles sont représentées par l'indice +. Les équations du mouvement deviennent donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_{+zx,x} + T_{+zy,y} = -4 & \text{dans } S \\ w_+ = 0 & \text{dans } \chi \\ \left( \begin{array}{l} T_{+zx} \\ T_{+zy} \end{array} \right) = \left( \frac{1}{8}(w_{+,x}^2 + w_{+,y}^2)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{Od}{(w_{+,x}^2 + w_{+,y}^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \left( \begin{array}{l} w_{+,x} \\ w_{+,y} \end{array} \right) & \text{si } \sqrt{T_{+zx}^2 + T_{+zy}^2} > Od \\ w_{+,x} = w_{+,y} = 0 & \text{si } \sqrt{T_{+zx}^2 + T_{+zy}^2} \leq Od \end{array} \right. \quad (27)$$

dont la solution est de la forme suivante :

$$w_+ = w_+(x_+, y_+, n, Od) \quad \text{dans } S_+ \quad (28)$$

où  $Od$  est le nombre d'Oldroyd défini comme suit :

$$Od = \frac{4s}{D_H F} \quad (29)$$

D'après cette analyse,  $Od$ ,  $n$  et la forme de la section sont les seuls paramètres de l'écoulement. Le nombre de Reynolds est également un paramètre, mais celui-ci sert surtout à identifier la nature du régime d'écoulement. Notre hypothèse de départ est de supposer que le régime d'écoulement est laminaire, c'est à dire que  $Re$  est petit.

En variables dimensionnelles l'équation (28) devient :

$$w = \left( \frac{D_H^{n+1} F}{32k} \right)^{1/n} w_+ \left( \frac{x}{D_H}, \frac{y}{D_H}, n, Od = \frac{4s}{D_H F}, \text{forme de } S \right) \quad (30)$$

En intégrant l'équation (30) le long de  $S$  et en divisant le résultat par l'aire de la section  $S$ , il vient

$$U = \frac{q_v}{S} = \left( \frac{D_H^{n+1} F}{32k} \right)^{1/n} U_+(n, Od, \text{forme de } S) \quad (31)$$

En conservant dans tous les cas la définition générale du facteur de frottement  $\Lambda$ , i.e :

$$J = \frac{F}{\rho g} = \frac{\Lambda}{D_H} \frac{U^2}{2g} \quad (32)$$

Il vient :

$$\Lambda = \frac{64}{Re} \frac{1}{\{U_+(n, Od, \text{forme de } S)\}^n} \quad (33)$$

où  $Re$  est le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho U^{2-n} D_H^n}{k} \quad (34)$$

On suppose que :

$$U_+(n, Od, S \text{ shape}) = U_+(n, Od = 0, \text{forme de } S) \cdot g^{1/n}(n, Od, \text{forme de } S) \quad (35)$$

qui exprime que l'influence des termes plastiques et visqueux apparaît séparément. La fonction  $g$ , qui représente le terme plastique intervenant dans le modèle d'Herschel-Bulkley, prend la valeur 1 lorsque  $Od = 0$  (loi de puissance)

En remplaçant l'équation (35) dans l'équation (31), puis dans l'équation (33), il vient respectivement :

$$U = \left( \frac{D_H^{n+1} F}{32k} \right)^{1/n} U_+(n, Od = 0, \text{forme de } S) \cdot g^{1/n}(n, Od, \text{forme de } S) \quad (36)$$

$$\Lambda = \frac{64}{Re} \frac{1}{\{U_+(n, Od = 0, \text{forme de } S)\}^n \cdot g(n, Od, \text{forme de } S)} \quad (37)$$

Le terme visqueux  $U_+(n, Od = 0, \text{forme de } S)$  est identique à celui déjà calculé dans la littérature pour un fluide de comportement la loi de puissance. Par contre, on note le peu

d'information disponible relative au terme plastique  $g$ .

Pour conserver formellement dans tous les cas la relation de Poiseuille, pour un fluide de comportement Newtonien et une section circulaire, on est conduit à définir un nombre de Reynolds généralisé valable pour un modèle d'Herschel-Bulkley :

$$Re_{HB} = Re \{U_+ (n, Od = 0, forme de S)\}^n \cdot g(n, Od, forme de S) \quad (38)$$

et l'équation (37) devient alors

$$\Lambda = \frac{64}{Re_{HB}} \quad (39)$$

Pour une section circulaire et un modèle Newtonien, on tombe sur la définition classique du nombre de Reynolds et pour un modèle d'Ostwald, on retrouve le nombre de Reynolds introduit par Bird. En l'absence de détermination précise du critère relatif à la transition laminaire/turbulent, on recommande, comme dans le cas Newtonien, de fixer l'étendue du domaine laminaire à  $Re_{HB} < 2100$ .

#### **Remarque**

En respectant la symétrie par rapport à (Ox), on vérifie que les quantités suivantes : Le diamètre hydraulique  $D_H$ , la vitesse moyenne  $U$  et le coefficient de perte de charge  $\Lambda$  ont les mêmes valeurs dans un canal et dans une conduite. Par contre, dans la conduite le débit, le périmètre mouillée et l'aire de la section sont deux fois plus grand que dans le canal.

### **1.3.2 Coefficient de perte de charge : Modèle Newtonien**

Quelle que soit la forme de la section, l'expression de  $\Lambda$  est la suivante :

$$\Lambda = \frac{64}{Re} \frac{1}{U_+ (1, Od = 0, forme de S)} \quad (40)$$

Dans la littérature cette expression est généralement écrite comme suit

$$\Lambda = \frac{\alpha}{Re} \quad (41)$$

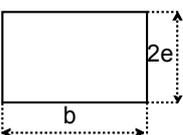
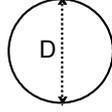
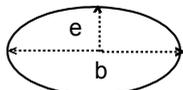
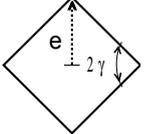
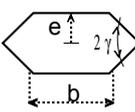
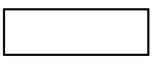
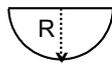
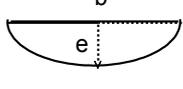
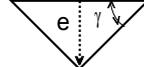
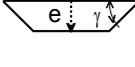
A partir des résultats présentés dans la littérature (cf. Berker 1963, White 1974, Zarling 1976) pour les écoulements dans les conduites diverses, un certain nombre de valeur de  $\alpha$  sont répertoriées dans le Tableau 1.

(\*) Pour une section rectangulaire de largeur finie  $b$  et d'épaisseur  $2e$ , la forme de la section est représentée par le rapport  $\hat{x}$  tel que  $\hat{x} = b/(2e)$ . Dans ce cas, l'expression de  $\alpha$  est déduite de Berker :

$$\alpha = \frac{512}{\left(1 + \frac{1}{\hat{x}}\right)^2 f(\hat{x})} \quad (42)$$

Tableau 1: Quelques valeurs de  $\alpha$  reportées dans la littérature

	$D_H$	$\alpha$
Plan	$4e$	96
Rectangle $\hat{x} = b/2e$	$\left(\frac{\hat{x}}{\hat{x}+1}\right)4e$	(*) $\approx \frac{16}{3}\left(1 - \frac{0.642}{\hat{x}}\right)$ if $x \geq 3$
Cercle	D	64
Ellipse $\hat{x} = b/2e$ $\hat{y} = \int_0^1 \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{\hat{x}^2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\zeta\right)} d\zeta$	$\frac{2e}{\hat{y}}$	$= 32\left(1 + \frac{1}{\hat{x}^2}\right)\left(\frac{1}{\hat{y}}\right)^2$ $\hat{x} \rightarrow \infty \quad \alpha = 8\pi^2 \approx 78.9$
Parallélogramme	$2\cos(\gamma)e$	$\approx 56.6$ if $\gamma = 30^\circ$
Hexagone $\hat{x} = \sin(\gamma)b/2e$	$\left(\hat{x} + \frac{1}{2\cos(\gamma)}\right)4e$ $\hat{x} + 1$	$\approx 60$

	Rectangle	Cercle	Ellipse	Parallelogramme	Hexagone
Dans la conduite					
Dans le canal					
	Rectangle	Demi-cercle	Demi-ellipse	Triangle	Trapèze

où  $f(\hat{x})$  est une fonction dont les valeurs sont données par l'auteur sous forme d'un tableau ou en forme de série :

$$\alpha = \frac{96}{\left(1 + \frac{1}{\hat{x}}\right)^2} \frac{1}{1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{1}{\hat{x}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^5} \tanh\left(\frac{2p+1}{2}\pi\hat{x}\right)} \quad (43)$$

Il est possible de vérifier que  $\alpha = 96$  pour  $\hat{x} \rightarrow \infty$  (section plane) et que  $\alpha \approx 56.91$  pour

$\hat{x} = 1$  (section carrée). Notons également qu'une section rectangulaire devient, à 5% près, similaire à une section plane lorsque  $\hat{x} > 13.3$ .

### 1.3.3 Coefficient de perte de charge : Modèle d'Ostwald

Pour un fluide de comportement la loi de puissance, Skelland (1967) donne les expressions suivantes :

$$\Lambda = \frac{\alpha(n, S)}{Re} \quad \text{où} \quad Re = \frac{\rho U^{2-n} D_H^n}{k} \quad (44)$$

$\alpha$  dépend de la forme de la section :

- forme circulaire :

$$\alpha = 2^{n+3} \left( 3 + \frac{1}{n} \right)^n ; U_+(n, Od = 0, \hat{x} \rightarrow \infty) = \frac{2^{\frac{3-n}{2}}}{\left( 2 + \frac{1}{n} \right)} \quad (45)$$

- section large :

$$\alpha = 2^{2n+3} \left( 2 + \frac{1}{n} \right)^n ; U_+(n, Od = 0, \hat{x} \rightarrow \infty) = \frac{2^{\frac{3-n}{2}}}{\left( 2 + \frac{1}{n} \right)} \quad (46)$$

- section carrée :

$$\alpha \approx 7.494 \left( \frac{1.733}{n} + 5.861 \right)^n ; U_+(n, Od = 0, \hat{x} = 1) \approx \frac{2^{\frac{3.094}{n} - 0.793}}{\left( 3.382 + \frac{1}{n} \right)} \quad (47)$$

### 1.3.4 Coefficient de perte de charge : Modèle de Bingham

La fonction  $g$  est déterminée analytiquement dans les cas suivants :

- forme circulaire :

$$g(n = 1, Od, \text{forme circulaire}) = 1 - \frac{4}{3} Od + \frac{1}{3} Od^4 \quad (48)$$

- section large :

$$g(n = 1, Od, \hat{x} \rightarrow \infty) = 1 - \frac{3}{2} Od + \frac{1}{2} Od^3 \quad (49)$$

- Section carrée : Calculée numériquement par Saramito & Piau :

$$g(n = 1, Od, \hat{x} = 1) \approx 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{Od}{Od_c} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{Od}{Od_c} \right)^4 \quad (50)$$

Au blocage le nombre d'Oldroyd est égal à 1,07. Les zones mortes apparaissent dans les coins

de la section.

La figure 3 représente pour différentes formes de S, g en fonction du nombre d'Oldroyd. L'influence de la forme de la section sur le terme g est donc assez faible.

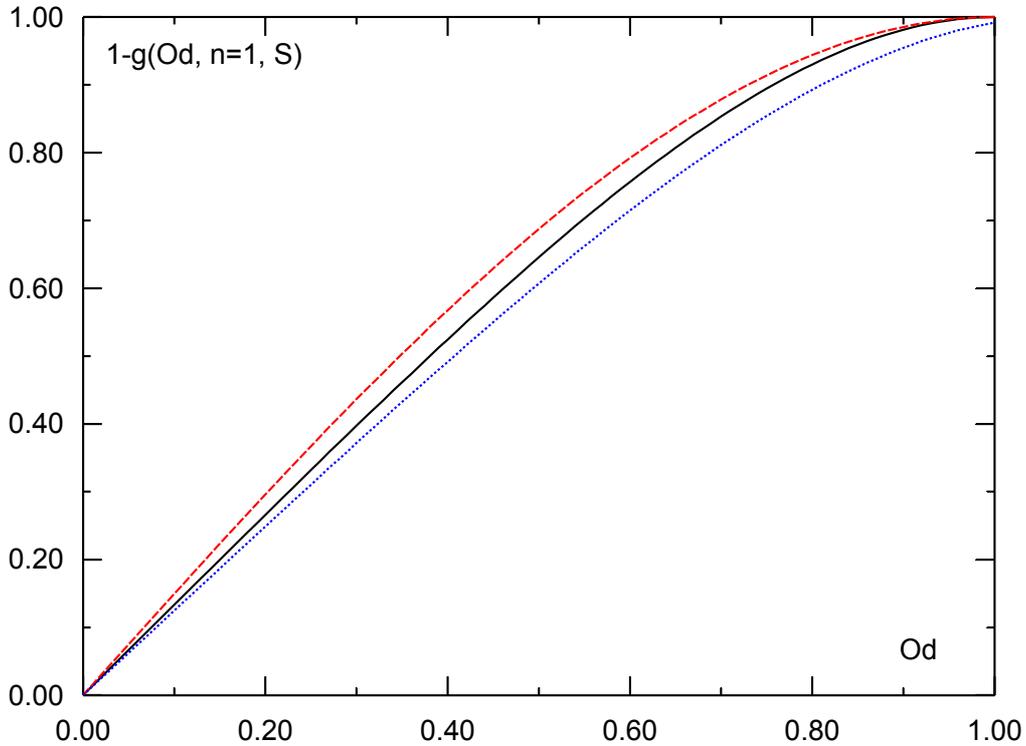


Figure 3: Variation de g en fonction de Od pour un modèle de Bingham

— Section circulaire    - - - - Section plane    ..... Section carrée

### I.3.5 Coefficient de perte de charge : Modèle d'Herschel-Bulkley

La fonction  $g(n, Od, S \text{ shape})$  peut être déterminée analytiquement dans les cas suivants :

- forme circulaire :

$$g(n, Od, O) = (1 - Od) \left( 1 - \frac{4}{1 + 2n} Od - \frac{2n}{(1 + 2n)(1 + n)} Od^2 - \frac{2n^2}{(1 + 2n)(1 + n)} Od^3 \right)^n \quad (51)$$

- section large :

$$g(n, Od, plan) = (1 - Od) \left( 1 - \frac{1}{1 + n} Od - \frac{n}{(1 + n)} Od^2 \right)^n \quad (52)$$

On représente sur la figure 4, pour une valeur de n égale à 1/5, la variation de g en fonction de Od. L'influence de la forme de la section sur le terme g diminue avec n. Répartition de vitesse locale

D'une façon générale, la répartition de vitesse locale est donnée par l'équation (30).

### Modèle Newtonien

$$w = \left( \frac{D_H^2 F}{32k} \right) w_+ \left( \frac{x}{D_H}, \frac{y}{D_H}, n = 1, Od = 0, \text{forme de } S \right) \quad (53)$$

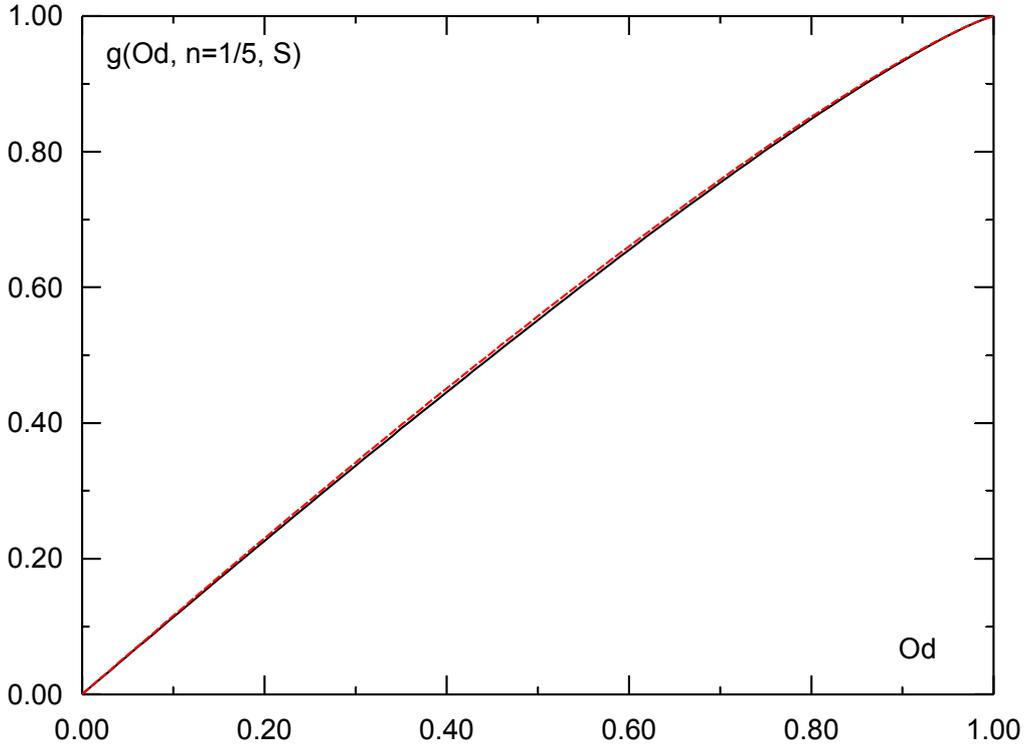


Figure 4: Variation de  $g$  en fonction de  $Od$  pour un modèle d'H-B ( $n=1/5$ )

— Section circulaire      - - - - Section plane

- forme circulaire :

$$w_+ = 2 \left( 1 - \left( \frac{2r}{D_H} \right)^2 \right) \quad (54)$$

avec  $D_H = 2R$ , où  $R$  est le rayon du cercle

- section large :

$$w_+ = \left( 1 - \left( \frac{4y}{D_H} \right)^2 \right) \quad (55)$$

où  $D_H = 4e$

- section rectangulaire quelconque (Berker) :  $\hat{x} = b/(2e)$

$$w = \frac{Fe^2}{2\mu} \left[ 1 - \left( \frac{y}{e} \right)^2 - 4 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{m^3} \frac{\cos\left(\frac{m y}{e}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{m x}{e}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{m b}{2e}\right)} \right] \quad (56)$$

où :

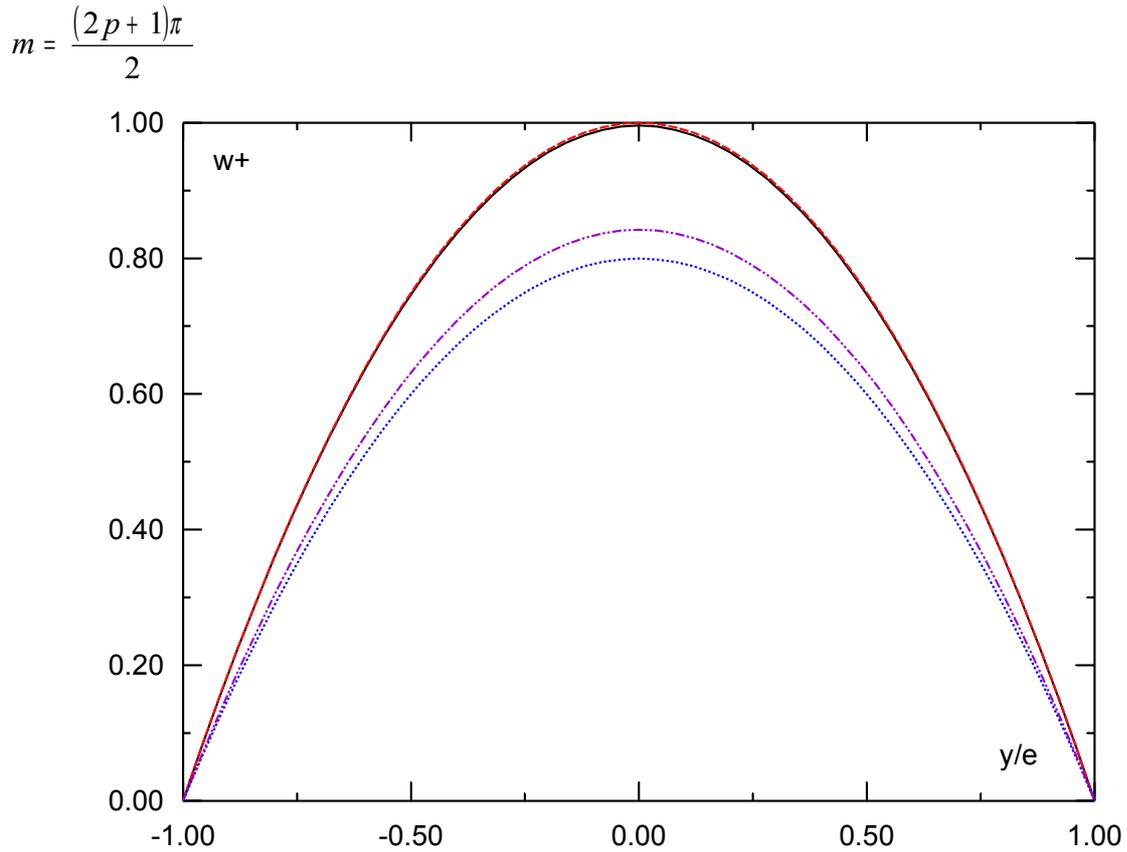


Figure 5: Profil médiane de vitesse locale en fonction de  $b/2e$  ; section rectangulaire ; modèle Newtonien

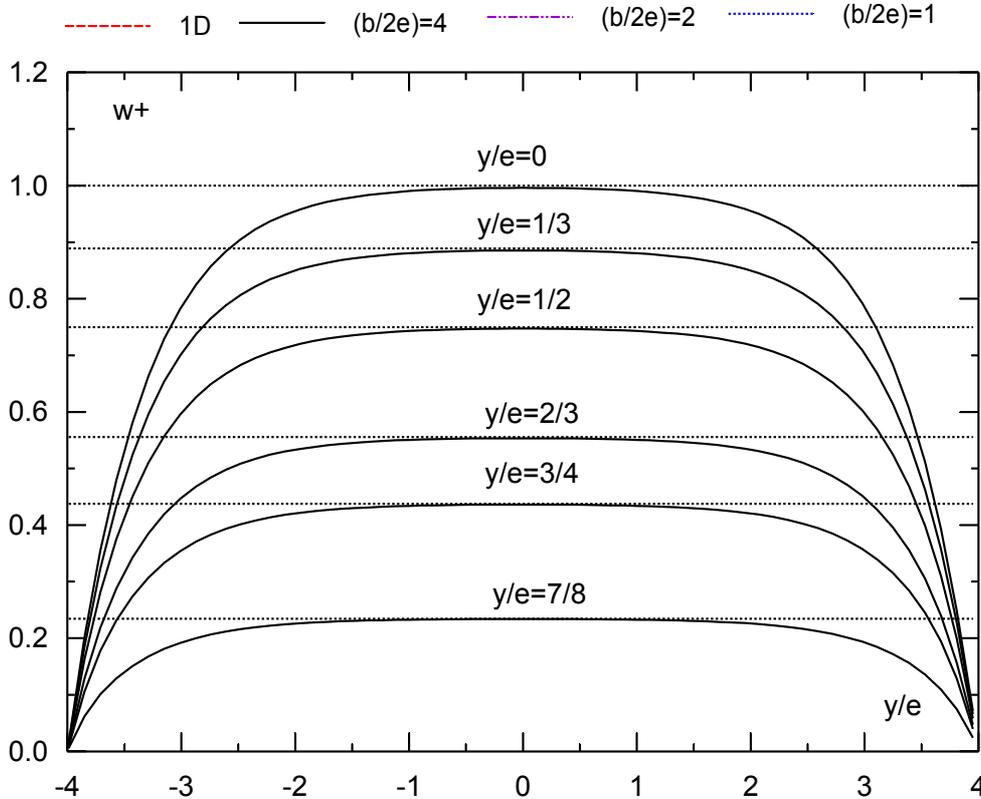


Figure 6: Profil transversal de vitesse locale en fonction de  $b/2e$  ; section rectangulaire ( $b/2e=4$ ); modèle Newtonien

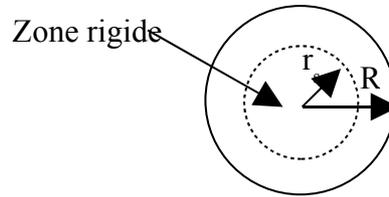
La figure 5 montre le profil central de vitesse en fonction du paramètre  $\hat{x}$ . Les courbes sont

bien décrites par le profil 1D (56) lorsque  $\hat{x} > 4$ . Sur la figure 6 on représente la répartition de vitesse suivant (Ox). On peut également observer ici que le profil central de l'écoulement est bien décrit par le profil 1D lorsque  $\hat{x} > 4$ .

Modèle d'Herschel Bulkley :

$$w_+ = w_+ \left( \frac{x}{D_H}, \frac{y}{D_H}, n, Od, S \text{ shape} \right) \quad (57)$$

- section circulaire ( $D_H = 2R$ ) : Le rayon de la conduite est  $R$ , la zone rigide est de rayon  $r_s$  en écoulement avec une vitesse constante  $w_s$ . La zone en déformation est située entre le rayon  $R$  et le rayon  $r_s$  avec  $r_s = (s/\tau_w)R$  et  $\tau_w = (RF)/2$  où  $\tau_w$  est la contrainte à la paroi



En variables dimensionnelles, la répartition de vitesse locale est :

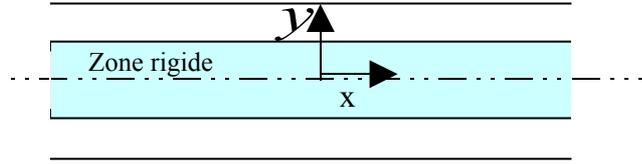
$$\left\{ \begin{array}{l} w_s = \frac{nR}{n+1} \left( \frac{\tau_w}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left( 1 - \frac{s}{\tau_w} \right)^{\frac{n+1}{n}} \\ w = w_s \left( 1 - \rho_f^{\frac{n+1}{n}} \right) \quad \text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} r \in (r_s, R) \\ \rho_f \in (0,1), \text{ où } \rho_f = \frac{r - r_s}{R - r_s} \end{array} \right. \\ w = w_s \quad \text{si} \quad r \leq r_s \end{array} \right. \quad (58)$$

Et en variables adimensionnelles, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{+s} = \frac{n}{n+1} 2^{\frac{3}{n}-1} (1 - Od)^{\frac{n+1}{n}} \\ w_+ = w_{+s} \left( 1 - \rho_f^{\frac{n+1}{n}} \right) \quad \text{lorsque} \quad \rho_f \in (0,1) \\ \text{où } \rho_f = \frac{r_+ - Od}{1 - Od} \quad \text{et } Od = \frac{s}{\tau_w}, \quad r_+ = \frac{r}{R} \\ w = w_s \quad \text{lorsque} \quad r_+ \leq Od \end{array} \right. \quad (59)$$

- section large ( $D_H = 4e$ ) : La zone rigide est d'épaisseur  $2y_s$  en écoulement avec une

vitesse constante  $w_s$ . La zone en déformation est située entre  $y = \pm y_s$  et  $y = \pm e$  avec  $y_s = (s/\tau_w)e$  et  $\tau_w = eF$ .



En variables dimensionnelles, la répartition de vitesse locale est :

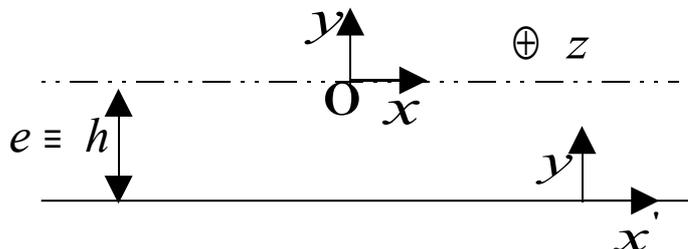
$$\left\{ \begin{array}{l} w_s = \frac{ne}{n+1} \left( \frac{\tau_w}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left( 1 - \frac{s}{\tau_w} \right)^{\frac{n+1}{n}} \\ w = w_s \left( 1 - \rho_f^{\frac{n+1}{n}} \right) \quad \text{si } \begin{cases} y \in (\pm y_s, \pm e) \\ \rho_f \in (0,1) \end{cases} \\ \text{où } \rho_f = \frac{y - y_s}{e - y_s} \quad \text{si } y > y_s \quad \text{et } \rho_f = \frac{y + y_s}{-e + y_s} \quad \text{si } y < -y_s \\ w = w_s \quad \text{si } |y| \leq y_s \end{array} \right. \quad (60)$$

Et en variables adimensionnelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{+s} = \frac{n}{n+1} 2^{\frac{3}{n}-2} (1 - Od)^{\frac{n+1}{n}} \\ w_+ = w_{+s} \left( 1 - \rho_f^{\frac{n+1}{n}} \right) \quad \text{quand } \rho_f \in (0,1) \\ \text{où } \rho_f = \frac{y_+ - Od}{1 - Od} \quad \text{si } y_+ > Od \quad \text{et } \rho_f = \frac{y_+ + Od}{-1 + Od} \quad \text{si } y_+ \leq -Od \\ \text{avec } Od = \frac{s}{\tau_w}, \quad y_+ = \frac{y}{e} \\ w_+ = w_{+s} \quad \text{si } |y_+| \leq Od \end{array} \right. \quad (61)$$

**Remarque**

Si l'on considère un canal dont l'origine de  $y$  est le fond du canal, on devrait alors changer  $\rho_f = 1 - (y'_+/ (1 - Od))$  où  $y'_+ = y'/e$ . De plus  $w$  devient dans ce cas égal à  $w_s$  lorsque  $e - y' \leq y_s$



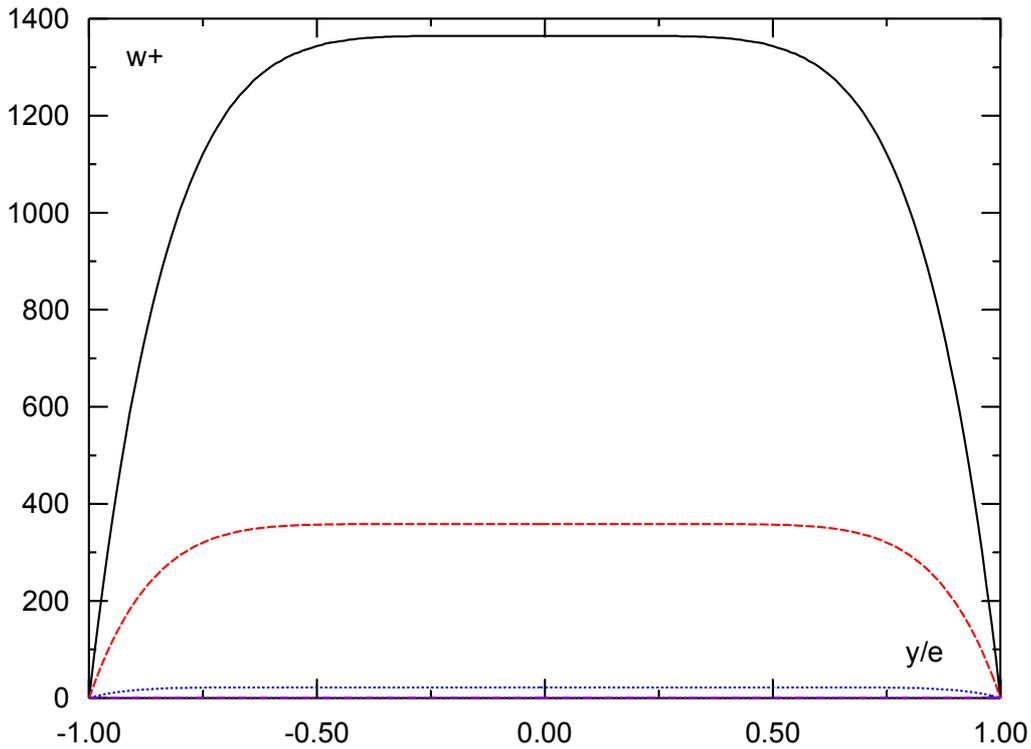


Figure 7: Profil médiane de vitesse locale en fonction de  $Od$  ; section plane ; modèle d'H-B  
( $n=1/5$ )

—  $Od=0$     - - -  $Od=0.2$     ·····  $Od=0.5$     - · - ·  $Od=0.8$

Sur la figure 7 on représente les profils de vitesse locale en fonction du nombre d'Oldroyd, cela pour une section plane et un modèle d'Herschel-Bulkley. Le seuil de contrainte  $s$  entraîne donc l'écoulement vers le blocage.

#### 1.4 Approches semi-théoriques dans des sections quelconques

Nous présenterons ici des méthodes approximatives simples pour déterminer le coefficient de résistance dans les conduites (ou les canaux) de sections quelconques.

##### 1.4.1 Concept de diamètre hydraulique

Isolons une portion de fluide de longueur  $L$ , de section mouillée  $S$  quelconque mais uniforme sur toute la longueur  $L$ , et de périmètre mouillé  $\chi$ , également constant. Si le régime d'écoulement est uniforme sur toute la longueur  $L$ , on montre que la résultante des forces extérieures sur le volume sélectionné est nulle. Compte tenu de l'évolution de  $\tau_w$  sur le périmètre, il conviendra d'écrire :

$$\bar{\tau}_w = \frac{1}{\chi} \int_{\chi} \tau_w dl = \frac{S}{\chi} F = \frac{D_H}{4} F \quad (62)$$

où  $\bar{\tau}_w$  est la valeur moyenne de  $\tau_w$  sur le périmètre. On aboutit donc à une équation analogue

à celle d'une conduite circulaire où la contrainte  $\tau_w$  est uniforme sur l'ensemble du périmètre mouillé. L'approximation du diamètre hydraulique consiste à utiliser le diamètre hydraulique  $D_H$  en place de  $D$ , cela dans tous les formules et les expressions relatives aux géométries circulaires. Cette approximation peut donner des résultats raisonnables et elle est utilisée en hydraulique pour les écoulements turbulents. En écoulement laminaire, il existe d'autres méthodes qui permettent d'avoir des résultats plus précise. Notons que la section du fluide en écoulement doit rester assez régulière et voisine des formes envisagées en I.3 pour que le concept du diamètre hydraulique soit utile.

#### 1.4.2 Méthode de pondération du gradient de vitesse moyen à la paroi

Notons d'abord que cette approximation a été proposée par Miller (1972) sur la base d'observations semi-empiriques. La même méthode a été également utilisée par Jones (1976) (dans le cas Newtonien) pour caractériser des sections quelconques dans les différents régimes d'écoulement (laminaire, turbulent et dans la transition).

Pour l'écoulement des fluides de comportement Newtonien ( $\tau = \mu \dot{\gamma}$ ) dans les conduites circulaires, la contrainte de frottement à la paroi  $\tau_w = DF/4$  (équation (62)) est uniforme et le gradient de vitesse à la paroi  $\dot{\gamma}_w = 8(U/D)$  est également uniforme. La relation entre  $\tau_w$  et  $\dot{\gamma}_w$  peut se traduire directement à partir de l'équation de comportement rhéologique sous forme  $\tau_w = \mu \dot{\gamma}_w$ . Dans une section quelconque et un modèle Newtonien, on obtient la même relation ( $\tau_w = \mu \dot{\gamma}_w$ ), mais en utilisant  $D_H$ ,  $\bar{\tau}_w$  et  $\bar{\dot{\gamma}}_w$  en place de  $D$ ,  $\tau_w$  et  $\dot{\gamma}_w$ , respectivement, et en pondérant en plus le gradient de vitesse à la paroi par un coefficient correcteur de non-circularité  $\lambda$ , soit  $\bar{\dot{\gamma}}_w = (8/\lambda)(U/D_H)$  avec :

$$\lambda(S) = \frac{64}{\alpha(n=1,S)} \quad (63)$$

D'autre part, Miller (1972) montre compte tenu de ces résultats expérimentaux (modèle d'Ostwald) que  $\bar{\tau}_w = \bar{\tau}_w(\bar{\dot{\gamma}}_w)$  est une relation unique pour un fluide donné indépendante de la forme de la conduite si le facteur correctif  $\lambda$  déterminé par exemple pour un fluide Newtonien est connu. Miller propose en outre d'utiliser directement pour  $\bar{\tau}_w(\bar{\dot{\gamma}}_w)$  la relation qui décrit le comportement rhéologique du fluide en cisaillement simple. Donc, selon Miller, pour un modèle d'Herschel-Bulkley ( $\tau = s + k\dot{\gamma}^n$ ), la relation entre la perte de pression et la vitesse débitante peut donc se traduire à partir de l'équation rhéologique sous la forme :

$$\frac{D_H F}{4} = s + k \left( \frac{8U}{\lambda D_H} \right)^n \quad (64)$$

Pour un modèle d'Ostwald, on vérifie que cette approximation correspond à  $\alpha = 8^{n+1} / \lambda^n$ . En comparant ce résultat à la solution exacte dans le cas d'une section circulaire ( $\lambda = 1$ , équation (45)), il apparaît un bon accord lorsque  $n$  est voisin de 1. Ce qui explique les bons résultats obtenus par Miller pour un modèle d'Ostwald lorsque  $0.4 < n < 1.5$ . On obtient cependant un écart considérable lorsque  $n$  est petit ou grand devant 1. En plus, vu les structures des solutions exactes dans le cas d'une section circulaire et plane, il est difficile d'admettre la validité de cette approximation avec des fluides à seuil de contrainte.

### 1.4.3 Méthode de pondération du diamètre hydraulique

Pour tenir en compte de non-circularité, l'idée est de multiplier le diamètre hydraulique par un coefficient correcteur. Ce coefficient peut être supposé indépendant des paramètres rhéologiques du fluide.

#### Diamètre équivalent Newtonien

Pour évaluer le terme  $\alpha(n, S)$ , on suppose que la forme de  $S$  est assez régulière et voisine d'une section circulaire pour que les formules et les expressions relatives aux géométries circulaires restent valables en utilisant  $\lambda D_H$  en place de  $D$  où  $\lambda$  est le coefficient géométrique introduit plus haut (équation (64)). L'avantage de cette technique est de retrouver la solution exacte correspondante à la forme circulaire lorsque  $\lambda = 1$ , et aussi les solutions exactes dans le cas Newtonien. Ainsi, compte tenu de l'équation (45), on propose, dans un premier temps, d'utiliser l'expression suivante:

$$\alpha(n, S) \approx \alpha_1 = 2^{n+3} \left( \frac{3}{\lambda(S)} + \frac{1}{\lambda(S) n} \right)^n \quad (65)$$

#### Diamètre équivalent du blocage

D'abord essayons de voir les conséquences appliquées de l'approximation précédente sur le terme  $g(n, Od, \text{forme circulaire})$ . Pour une section carrée, on obtient, à partir de la définition de  $Od$ , une valeur du nombre d'Oldroyd lors du blocage égal à 1.127, qui est 10% plus élevée que la valeur obtenue numériquement par Saramito & Piau. Ainsi, cette approximation peut être très approchée pour les fluides à seuil de contrainte. Pour une meilleure évaluation, nous proposons de pondérer dans ce cas le diamètre de la conduite par le diamètre équivalent lors du blocage, que l'on suppose indépendant de  $n$ . Il revient donc à remplacer dans l'équation (51)  $Od$  par  $Od/Od_c$ , soit

$$g \approx \left( 1 - \frac{Od}{Od_c(S)} \right) \left( 1 - \frac{4}{1+2n} \frac{Od}{Od_c(S)} - \frac{2n}{(1+2n)(1+n)} \left( \frac{Od}{Od_c(S)} \right)^2 - \frac{2n^2}{(1+2n)(1+n)} \left( \frac{Od}{Od_c(S)} \right)^3 \right)^n \quad (66)$$

Deux méthodes peuvent être utilisées pour déterminer la valeur de  $Od_c$ . Comme ce paramètre est supposé indépendant de  $n$ , on peut simplifier en résolvant dans  $S$  le problème avec une loi de Bingham et déduire par la suite le nombre d'Oldroyd lors du blocage. Dans la deuxième méthode, nous revenons à la définition du blocage qui s'exprime par un gradient de vitesse nul dans toute la section  $S$ . Ainsi, nous supposons ce cas se présente également avec une loi de puissance lorsque  $n \rightarrow 0$  et  $k \equiv s$ , soit :

$$Od_c(S) = \frac{8}{\lim_{n \rightarrow 0} \alpha \left( n, Od = 0, S \text{ shape} \right)} \quad (67)$$

En appliquant cette relation aux cas des sections plane, circulaire, et carré (équations (46), (45) et (47)), on obtient  $Od_c = 1, 1, 1.067$ , respectivement. Les deux premières valeurs sont exactes et la dernière est très proche de la valeur obtenue numériquement par Saramito & Piau avec un modèle de Bingham. Ce qui valide, à partir de ces cas particuliers, notre hypothèse de départ.

Cependant, en appliquant cette formule à l'équation (65), on obtient quel que soit  $S$ , une valeur de  $Od_c$  égale à 1. Or, cela n'est pas toujours le cas. Nous proposons alors de modifier notre première approximation telle que l'équation (67) soit vérifiée, i.e par :

$$\alpha(n, S) \approx \alpha_2 = 2^{n+3} Od_c(S)^{n-1} \left( \frac{3}{\lambda(S)} + \frac{1}{\lambda(S) n} \right)^n \quad (68)$$

Pour valider cette approximation, nous avons représenté sur la la solution exacte dans le cas d'une section large et la solution numérique dans le cas d'une section carrée (équation (47)). Ces deux solutions sont comparées à l'approximation représentée par l'équation (68) L'accord est satisfaisant, on obtient un écart inférieur à 0.9% pour la section carrée et inférieur à 3.5% pour la section large.

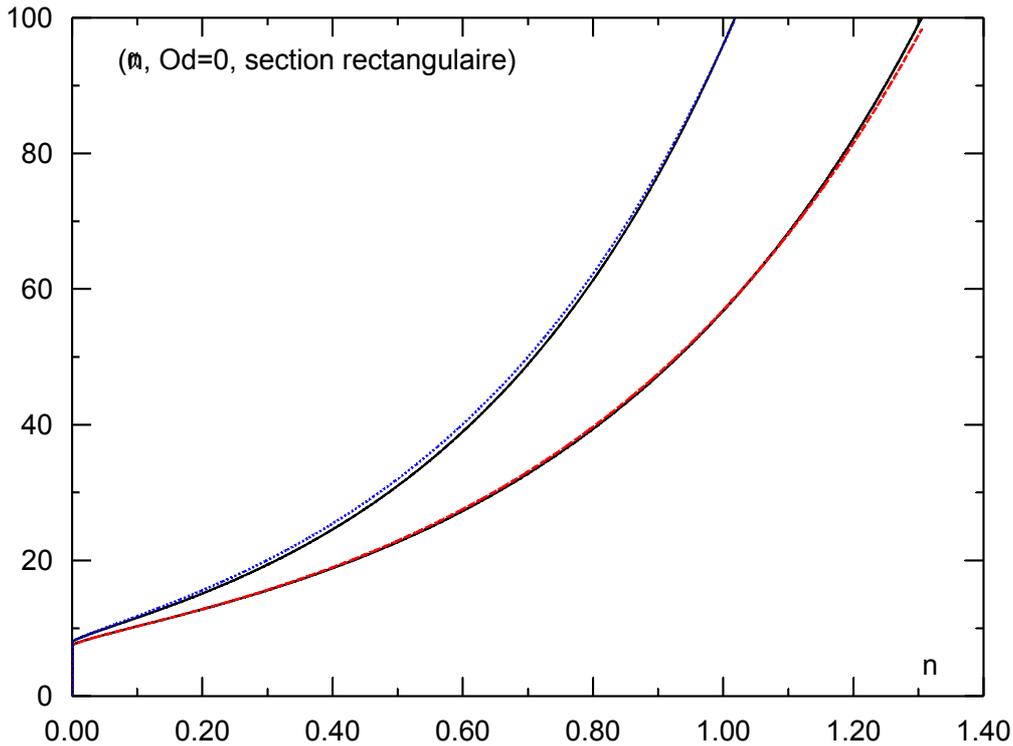


Figure 8: Validation de l'approximation par pondération du diamètre hydraulique référencée à une section circulaire

— Solution approchée (68)    - - - Section carée (47)    ..... section plane (46)

**Remarques**

1. Si la forme de la section transversale est très complexe et qu'il n'existe pas de solutions analytiques permettant de déterminer  $\lambda$  et  $Od_c$ , on peut évaluer ces deux paramètres expérimentalement :  $\lambda$  avec un fluide de comportement Newtonien, comme l'eau ; et  $Od_c$  avec un modèle de Bingham en mesurant la perte de charge lors du blocage de l'écoulement.
2. Souvent dans la nature, la largeur de l'écoulement est très importante vis à vis de sa hauteur. Il conviendra dans ce cas de rapprocher la section complexe du canal d'une section plane au lieu d'une section circulaire, il résulte :

$$\alpha(n, S) \approx 2^{2n+3} Od_c(S)^{n-1} \left( \frac{2}{\lambda p(S)} + \frac{1}{\lambda p(S)n} \right)^n \quad \text{avec} \quad \lambda p = \frac{96}{\alpha(n=1, S)} \quad (69)$$

et

$$g(n, Od, S) = \left( 1 - \frac{Od}{Od_c(S)} \right) \left( 1 - \frac{1}{1+n} \frac{Od}{Od_c(S)} - \frac{n}{(1+n)} \left( \frac{Od}{Od_c(S)} \right)^2 \right)^n \quad (70)$$

**1.4.4 Méthode de pondération de la contrainte moyenne**

Notre objectif ici est d'évaluer la perte par frottement dans une section rectangulaire en se

référant à une section plane. Il est naturel que dans une section rectangulaire les bords du canal participent au frottement et augmentent la résistance hydraulique. Pour évaluer ces effets, la plus simple analyse consiste à supposer que la contrainte est constante le long de  $\lambda$  et à pondérer ainsi  $F$ , intervenant dans les expressions de la section plane, par  $(b/(b+2e))F$ , donc par  $(\hat{x}/(1+\hat{x}))F$ .

Puisque dans une section plane :

$$U(=) = \left( \frac{(4e)^{n+1}F}{32k} \right)^{1/n} U_+(n, Od = 0, =) \cdot g^{1/n} \left( n, Od = \frac{4s}{(4e)F}, = \right) \quad (71)$$

Il vient en remplaçant  $F$  par  $(\hat{x}/(1+\hat{x}))F$  :

$$U(\square) \approx \left( \frac{D_H^{n+1}F}{32k} \right)^{1/n} \left( \frac{\hat{x}+1}{\hat{x}} \right) U_+(n, Od = 0, =) \cdot g^{1/n} \left( n, Od = \frac{4s}{D_H F}, = \right) \quad (72)$$

Cette approximation n'apporte donc aucun changement au terme  $g(n, Od, S)$ , qui sera toujours exprimé par l'équation (52). Tandis que  $\alpha$  (représenté par l'équation (46)) devrait être corrigé par :

$$\alpha(n, S) \approx 2^{2n+3} \frac{\hat{x}+1}{\hat{x}} \left( 2 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (73)$$

On vérifie qu'on peut caractériser cette approche à partir de l'analyse précédente en remplaçant  $Od_c = 1$  et  $\lambda p = (\hat{x}/(\hat{x}+1))^{1/n}$ . Donc ici,  $\lambda p$  n'est pas un paramètre géométrique, il dépend également de l'indice  $n$ .

Examinons maintenant le cas Newtonien. La solution exacte correspondant à ce cas est

$$U(\square) = \left\{ \frac{f(\hat{x})}{8} \left( \frac{1+\hat{x}}{\hat{x}} \right)^2 \right\} \left( \frac{D_H^2 F}{32k} \right) \quad (74)$$

et la solution approchée peut être déduite à partir de l'équation (72), soit :

$$U(\square) \approx \left\{ \frac{2}{3} \frac{\hat{x}+1}{\hat{x}} \right\} \left( \frac{D_H^2 F}{32k} \right) \quad (75)$$

qui donne un écart

$$E(\hat{x}) = \left( 1 - \left( \frac{3}{16f(\hat{x})} \frac{\hat{x}}{\hat{x}+1} \right) \right) 100\% \quad (76)$$

On vérifie qu'on retrouve bien la section plane lorsque  $\hat{x} \rightarrow \infty$ . On obtient cependant un écart considérable dans une section carrée (soit  $\approx 18.5\%$  d'écart), d'où l'inconvénient majeur de cette méthode.

### I.4.5 Approximation du profil central de vitesse dans une section rectangulaire

Dans le cas Newtonien, on a vu que le profil central de vitesse ( $x=0$ ) en régime laminaire est bien décrit par le profil 1D pourvu que  $\hat{x} > 4$  (Figs. II-4 et II-5). Dans la littérature, en écoulement à surface libre, cette même hypothèse est généralement admise lorsque ce rapport est entre 2.5 et 5 suivant la rugosité des parois (cf. Chow 1959, pp. 27). Cependant, dans le cas d'un modèle d'Herschel-Bulkley, cette approximation dépend à la fois de  $\hat{x}$ ,  $n$  et  $Od$ . Autrement dit, pour chaque couple  $(n, Od)$ , il devrait y avoir un  $\hat{x}$  limite, au-delà, le profil central de vitesse sera bien décrit par le profil 1D.

En l'absence de détermination précise de cette limite, on propose ici une méthode de rectification du profil 1D qui permet d'évaluer le profil central de vitesse dans une section rectangulaire quelconque. On porte d'abord la rectification sur la vitesse maximale (à  $y=0$ ) qui est en fait la vitesse du bouchon dans le cas d'un fluide présentant un seuil de contrainte. On suppose que cette vitesse maximale peut être également séparée en deux termes :

$$w_s = \left( \frac{D_H^{n+1} F}{32k} \right)^{1/n} w_{+,s}(n, Od = 0, \hat{x}) g_s(n, Od, \hat{x})^{1/n} \quad (77)$$

- Dans une section large :

$$w_{+,s}(n, Od = 0, \infty) = \frac{n}{n+1} 2^{\frac{3}{n}-2} \quad \text{et} \quad g_s(n, Od, \infty) = (1 - Od)^{\frac{n+1}{n}} \quad (78)$$

- Dans une section circulaire :

$$w_{+,s}(n, Od = 0, O) = \frac{n}{n+1} 2^{\frac{3}{n}-1} \quad \text{et} \quad g_s(n, Od, O) = (1 - Od)^{\frac{n+1}{n}} \quad (79)$$

- Dans le cas Newtonien et une section rectangulaire :

$$w_{+,s}(n = 1, Od = 0, \hat{x}) \approx \left( \frac{1 + \hat{x}}{\hat{x}} \right)^2 \left( 1 - \frac{32}{\pi^3 \cosh(\pi \hat{x}/2)} \right) \quad \text{et} \quad g_s(n = 1, Od, \hat{x}) = 1 \quad (80)$$

Pour un modèle de Bingham et une section carrée, Saramito & Piau, par résolution numérique, donnent  $g_s(n = 1, Od, \hat{x} = 1) = (1 - Od / Od_c)^2$ . Ce qui correspond à la correction du profil 1D en utilisant d'une part le diamètre hydraulique dans le calcul de  $Od$ , d'autre part, le nombre de  $Od$  lors du blocage ( $Od_c \approx 1.07$ ). Ces corrections vérifient bien nos mesures, ainsi nous proposons d'étendre cette approche au cas général d'un modèle d'Herschel-Bulkley, soit :

$$w_{+,s}(n, Od = 0, \hat{x}) \approx \frac{n}{n+1} \left( \frac{1 + \hat{x}}{\hat{x}} \right) 2^{\frac{3}{n}-2} \quad \text{et} \quad g_s(n, Od, \hat{x}) \approx \left( 1 - \frac{Od}{Od_c} \right)^{n+1} \quad (81)$$

Si  $\hat{x} \rightarrow \infty$ , on retrouve la section plane et si  $\hat{x} = 1$  et  $n = 1$ , l'équation (81) donne  $w_{+s} = 2$  qui est légèrement inférieure à la valeur obtenue numériquement par Saramito & Piau ( $\approx 2.358$  c'est la valeur exacte dans le cas Newtonien).

D'autre part, dans la zone en déformation, on suppose que le système (61) reste valable dans la mesure où la vitesse maximale est corrigée suivant l'analyse ci-dessus. On déduit ainsi la vitesse moyenne au centre du canal ( $U_{\text{int}}$ ), soit :

$$U_{\text{int}} = \left( \frac{n+1}{2n+1} \right) \left( 1 + \frac{n}{1+n} \left( \frac{Od}{Od_c} \right) \right) w_s \quad (82)$$

et le coefficient de forme  $\beta$

$$\beta = \frac{\int_0^h w^2 dh}{U^2} = (2n+1) \frac{2(n+1)^2 + nOd(3+4n)}{(n+nOd+1)^2(2+3n)} \quad (83)$$

On vérifie que  $\beta = 1$  lorsque  $Od = 1$  ou  $n = 0$  et que  $\beta = 1.2$  dans le cas Newtonien.  $\beta$  varie donc faiblement avec  $Od$  et  $n$ , entre 1 et  $n = 1.2$  si le fluide est rhéofluidifiant. Il en est de même en fonction de l'abscisse dans l'écoulement graduellement. Une simplification raisonnable consiste à prendre dans ce cas  $\beta = \beta(n, Od = 0)$ .

Compte tenu de ces relations, il est possible alors d'évaluer le débit traversant une conduite en charge (ou un canal) connaissant la géométrie de l'écoulement et les paramètres rhéologiques du fluide.

## 1.5 Régime graduellement varié

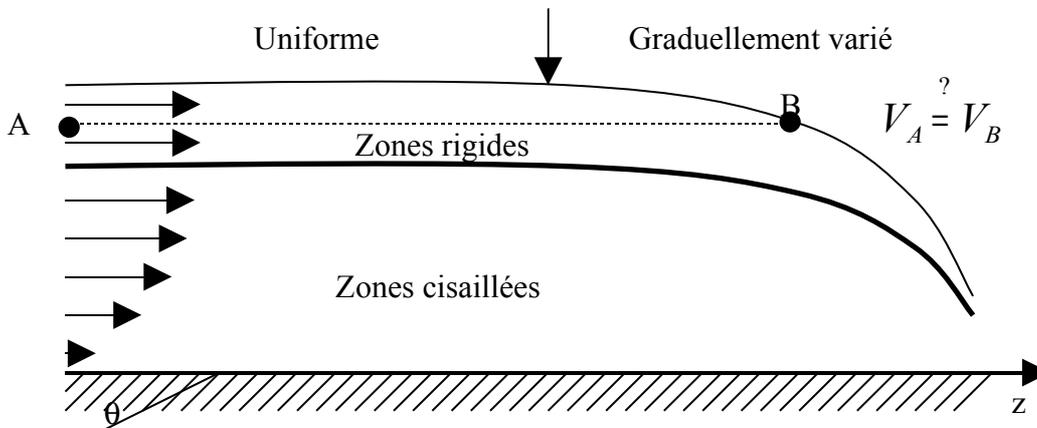
### 1.5.1 Définition

Lorsque les trajectoires des différents filets liquides s'écoulant dans un canal ne sont plus tout à fait parallèles entre elles on a affaire à un mouvement (ou régime) varié ; la surface libre et le fond du canal ne sont plus parallèles. Ce régime se produit avant ou près les singularités. Il apparaît même dans un canal de propriétés uniformes (rugosité, section et pente uniformes), mais seulement aux voisinages de ses extrémités.

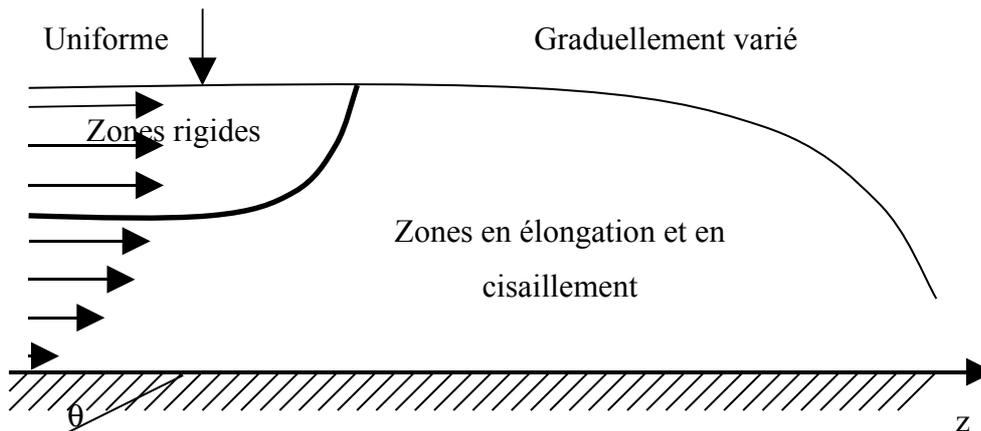
### 1.5.2 Mécanisme du seuil de contrainte dans l'écoulement graduellement varié

Considérons en particulier l'écoulement au voisinage d'une chute brusque dans un canal large avec une faible inclinaison. La forme de la surface libre pour l'eau est très bien connue

(voir par exemple Chow 1959). Le régime d'écoulement est critique, dans une section proche de la chute.



(a) Schéma déduit de l'hypothèse de l'écoulement localement uniforme : écoulement en cisaillement seulement dont la répartition des contraintes est supposé, comme en écoulement uniforme, linéaire.



(b) Schéma proposé par Piau (1996) : Ecoulement à la fois en élongation et en cisaillement  
 Figure 9 : Schémas proposés dans la littérature pour caractériser le profil de la surface libre et le profil de la surface seuil dans l'écoulement graduellement varié

A l'amont de cette section critique, la profondeur de l'écoulement croît graduellement, qui peut être calculée en intégrant l'équation classique (13). Les conditions d'écoulement uniforme sont bien vérifiées en allant loin vers l'amont de la chute. La pente de frottement  $J$  est modélisée en utilisant localement à chaque abscisse l'expression de la pente de frottement pour un écoulement équivalent uniforme. Chaque tranche dans l'écoulement graduellement varié est traitée comme si elle était localement uniforme. C'est aussi la même approximation qui a été utilisée par plusieurs investigateurs (Coussot 1994, Martinet 1992 et autres) pour modéliser les écoulements graduellement variés avec des fluides à seuil de contrainte. La solution de l'écoulement uniforme est bien connue, avec une zone en déformation au

voisinage de la paroi et une zone rigide au voisinage de la surface libre. Les deux zones sont séparées par une surface critique qui correspond au seuil d'écoulement. Un domaine similaire est alors supposé dans chaque section de l'écoulement graduellement varié jusqu'à l'endroit de la chute (figure 9a). D'après Piau, cette approximation est incomplète. L'argument est qu'on a affaire ici à un fluide viscoplastique, donc le tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$  doit être nul le long des zones rigides, et par conséquent il serait impossible que la profondeur du fluide varie. En effet, dans un écoulement plan,  $\mathbf{D} = 0$  signifie que  $w_{,z} = 0$ ,  $v_{,y} = 0$  et  $w_{,y} = -v_{,z}$ . La condition  $w_{,z} = 0$  fait savoir que la vitesse est constante le long d'une droite parallèle au fond du canal située dans la zone rigide, cela revient à dire que  $w_A = w_B$  (figure 9a). Ce résultat contredit évidemment la physique de cet écoulement permanent et accéléré. Ici, on devrait dans tous les cas avoir  $w_B > w_A$  quel que soit le point  $A$  situé dans la zone rigide de l'écoulement uniforme. Il est clair donc que les zones rigides ne peuvent pas exister si la profondeur du fluide varie. Par conséquent, comme la contrainte tangentielle est faible au voisinage de la surface libre (nulle à la surface libre si on néglige le frottement entre l'air et le liquide), les contraintes normales doivent être assez importantes dans cette région pour dépasser la valeur du seuil.

Piau (1996) propose alors un autre schéma de l'écoulement et de la surface seuil, frontière qui sépare les zones rigides des zones en écoulement. Le schéma est représenté sur la figure 9b. Selon l'auteur, les valeurs des contraintes normales diminuent continuellement quand on allant vers l'amont de la chute, jusqu'à où le point R est atteint. Avant ce point, le fluide est entièrement en écoulement. Les zones rigides apparaissent au-delà du point R. On a affaire d'abord à un écoulement également graduellement varié caractérisé par une profondeur constante (égale à la profondeur d'écoulement uniforme) et une augmentation progressive, dans la direction amont, de l'épaisseur de la zone rigide jusqu'à où les propriétés de l'écoulement uniforme sont obtenues. Ici, les contraintes normales deviennent nulles, donc les contraintes se réduisent aux contraintes de cisaillement seulement. L'écoulement du fluide dans la région graduellement variée est à la fois en cisaillement et en élongation. Dans la région où l'épaisseur de la zone rigide diminue progressivement, la conservation du débit montre que le cisaillement au fond doit être plus grand qu'il serait si la vitesse dans la zone rigide était entretenue identique à celle de la région uniforme. Compte tenu de cette analyse, Piau suggère que l'équilibre d'une tranche de fluide dans la région d'écoulement graduellement varié implique nécessairement d'augmenter la contrainte de cisaillement en

plus du terme considéré dans l'hydraulique classique, cela en tenant compte de l'existence de la surface seuil d'une part, et des contraintes normales, d'autre part.

Isolons une portion de fluide de longueur  $dz$ . En tenant compte des contraintes élongationnelles, l'équilibre de la tranche doit être contrôlé par l'inertie d'une part, les forces de pression d'autre part et aussi par le ralentissement viscoplastique ' $R_f$ '. Ce dernier peut être décomposé en deux termes : un frottement visqueux d'origine les contraintes tangentielles ' $\bar{\tau}_w$ ' sur les parois du canal ( $\bar{\tau}_w$  est la valeur moyenne de  $\tau_w$  sur le périmètre mouillé), et un ralentissement issu de la pondération des contraintes normales le long de la section S de l'écoulement ' $\bar{\sigma}_S$ ', soit :

$$R_f = \bar{\sigma}_S + \bar{\tau}_w \text{ avec } \bar{\sigma}_S = \int_S \frac{\partial}{\partial z} (t_{yy} - t_{zz}) \partial \sigma = \frac{\partial}{\partial z} \int_S (t_{yy} - t_{zz}) \partial \sigma - (t_{yy} - t_{zz})_{y=h} \frac{\partial S}{\partial z} \quad (84)$$

où  $t_{zz}$  et  $t_{yy}$  sont les deux composantes normales du déviateur du tenseur de contrainte  $\mathbf{T}$ . En conservant dans tous les cas l'expression de la pente du frottement  $J$ , il vient :

$$\frac{R_f}{\rho g S} = \frac{1}{\rho g S} \int_S \frac{\partial}{\partial z} (t_{yy} - t_{zz}) \partial \sigma + J \quad (85)$$

Après une analyse d'ordre de grandeur établie sur les équations locales de mouvement, Piau (1996) a établi dans le régime graduellement varié les relations approchées suivantes :

$$\int_S \frac{\partial}{\partial z} (t_{yy} - t_{zz}) \partial \sigma \approx \int_S \frac{\partial}{\partial z} (t_{yy}^s - t_{zz}^s) \partial \sigma = -4s \int_S \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{w_z}{w_y} \right) \text{sgn}(w_y) \partial \sigma \approx \varphi b s \frac{\partial h}{\partial z} \text{sgn}(h_z) \quad (86)$$

et :

$$t_{zy,y} \approx \left\{ k (w_y)^n_{,y} - 2s \left( \frac{w_z}{w_y} \right)_{,y}^2 \right\} \text{sgn}(w_y) \quad (87)$$

où  $b$  est la largeur du canal à la surface libre, l'indice  $s$  indique la contribution du terme plastique,  $\varphi$  étant un coefficient de forme qui tient compte des contraintes normales dues au seuil,  $\text{sgn}(h_z)$  est le signe de la tangente de la surface libre (=0, 1 ou -1) et  $t_{zy}$  étant la composante tangentielle du déviateur du tenseur de contrainte  $\mathbf{T}$ .

### 1.5.3 Première évaluation du paramètre de forme $\varphi$

Considérons une tranche de fluide en équilibre soumise à son poids propre seulement. En négligeant les contraintes tangentielles (donc loin des parois du canal), le tenseur des contraintes de Cauchy s'écrit comme suit :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui peut être décomposé en deux tenseurs : un tenseur sphérique  $(1/3) \text{tr}(\Sigma) \mathbf{I}$  et  $\mathbf{T}$ , le déviateur du tenseur  $\Sigma$ , soit :

$$\Sigma = \frac{\sigma_y}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sigma_y}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le critère de Van Mises, utilisé dans le modèle d'Herschel-Bulkley, correspond à la forme rationnelle la plus simple  $\sqrt{-T_{II}} \leq s$ , soit dans notre cas  $|t_{yy} - t_{xx}| = |\sigma_y| \leq \sqrt{3} s$ .

Supposons que le long de la section mouillée  $S$ , le seuil de plasticité est atteint pour que le fluide coule aussitôt après, il résulte que  $\int |t_{yy} - t_{xx}| \partial \sigma \approx \sqrt{3} s S$ , et en négligeant l'effet de la tension superficielle, il vient :

$$\int_S \frac{\partial}{\partial z} (t_{yy} - t_{xx}) \partial \sigma = \frac{\partial}{\partial z} \int_S t_{yy} - t_{xx} \partial \sigma \approx \sqrt{3} s b \frac{\partial h}{\partial z} \text{sgn}(h_{,z}) \quad (88)$$

Ainsi, si le fluide est en élongation simple, le critère de Van Mises estime la valeur de  $\varphi$  à  $\sqrt{3}$  pour que le fluide coule. Notons également que d'après le critère de Tresca  $\varphi = 2$  en élongation simple.

#### 1.5.4 Equation différentielle du mouvement graduellement varié

Considérons un canal cylindrique (on dit aussi prismatique en hydraulique) de pente  $\theta$  et le modèle d'Herschel-Bulkley. En régime graduellement varié, les équations de base à considérer sont donc celles de Piau (1996) qui se distinguent par rapport au modèle classique par un terme supplémentaire relatif aux contraintes élongationnelles dû au seuil de contrainte. Cela concerne en particulier les zones d'écoulement graduellement varié où toutes les sections de l'écoulement sont en déformations. Dans le cas permanent ce nouveau modèle de Piau se simplifie, comme suit :

$$\beta U \frac{\partial U}{\partial z} = g \left( \sin(\theta) - \cos(\theta) h_{,z} - \frac{\varphi s b}{\rho g S} \frac{\partial h}{\partial z} \text{sgn}(h_{,z}) - J \right) \quad (89)$$

pour l'équation dynamique qui exprime l'équilibre entre les forces de pesanteur, de frottement, d'inertie et des contraintes élongationnelles, et

$$\frac{\partial q_v}{\partial z} = 0 \quad (90)$$

pour l'équation de continuité où  $q_v = US$  est le débit,  $h$  est la profondeur et  $\beta$  étant le coefficient de forme qui tient compte de la non répartition uniforme de la vitesse (voir plus haut)

Après manipulations, il résulte :

$$h_{,z} = \frac{\sin(\theta) - J}{\cos(\theta) - \frac{\beta b q_v^2}{g S^3} + \frac{s \phi b}{\rho g S} \operatorname{sgn}(h_{,z})} \quad (91)$$

En conservant la valeur du nombre de Froude égale à 1 pour définir la hauteur critique, il est possible de redéfinir le nombre de Froude de l'hydraulique classique en rajoutant le terme supplémentaire de Piau, soit :

$$Fr^2 = \frac{\beta b q_v^2}{g S^3 \cos \theta} - \frac{\phi s}{\rho g h \cos \theta} \operatorname{sgn}(h_{,x}) \quad (92)$$

et l' devient :

$$h_{,z} = \frac{\sin(\theta) - J}{\cos(\theta) (1 - Fr^2)} \quad (93)$$

Il est également possible de redéfinir l'énergie de l'écoulement en tenant compte des contraintes élongationnelles, soit :

$$E = h + \frac{1}{2} \frac{\beta q_v^2}{g \cos(\alpha) h^2} + h_\phi \operatorname{sgn}(h_{,x}) \ln \left( \frac{h}{h_\phi} \right) \text{ avec } h_\phi = \frac{s \phi}{\rho g \cos(\alpha)} \quad (94)$$

$h_\phi$  est une profondeur critique inconnue en hydraulique classique qui dépend des contraintes élongationnelles dues au seuil de contrainte. Lorsque  $h \rightarrow h_\phi$ ,  $E \rightarrow \pm \infty$ , c'est dans ce cas que les contraintes élongationnelles devraient apparaître nettement dans l'écoulement. Nos expériences ont été réalisées avec  $\operatorname{sgn}(h_{,x}) = -1$  et  $h > h_\phi$ , cela signifie que les contraintes élongationnelles diminuent dans notre cas l'énergie de l'écoulement et contribuent ainsi au ralentissement du fluide.

Comme nous allons voir dans la suite, la profondeur caractéristique  $h_\phi$  peut être introduite dans plusieurs autres situations d'écoulement des fluides à seuil de contraintes. Par exemple, dans le problème de rupture de barrage, elle correspond à la hauteur limite au-dessous de laquelle le fluide ne coule pas. Physiquement, cela signifie que la pression et l'inertie ne

peuvent pas surmonter l'énergie due aux contraintes élongationnelles pour entraîner l'écoulement du fluide.

En fonction de  $E$ , l'équation (91) devient :

$$E_{,z} = \frac{1}{\cos(\theta)} (\sin(\theta) - J) \quad (95)$$

### 1.5.5 Hauteurs caractéristiques de l'écoulement

#### Hauteur normale

Considérons un canal de pente et de débit constant et un modèle de Herschel-Bulkley dont les paramètres rhéologiques ( $s$ ,  $k$ ,  $n$ ) sont connus. Lorsque le numérateur de l'équation (91) s'annule, la surface libre et le fond ont la même pente. Donc la profondeur est constante et correspond à la hauteur normale ( $h_n \equiv e$ ). Le calcul de cette hauteur nécessite la résolution des équations du régime uniforme. Le procédé du calcul est numérique.

#### Hauteur critique

Considérons un canal de section quelconque et de pente  $\theta$  portant un débit constant. Lorsque le dénominateur de l'équation (91) s'annule, la profondeur du fluide atteint une hauteur appelée hauteur critique " $h_c$ ". Le régime d'écoulement correspondant est appelé régime critique. En général, ce régime est instable (fluctuation de la surface libre). Une petite variation de l'énergie provoque des variations sensibles de profondeur de part et d'autre de  $h_c$ . Pour le calcul de  $h_c$ , on annule le dénominateur de l'équation (91), soit :

$$\cos(\theta) - \frac{\beta b q_v^2}{g S^3} + \frac{s \phi b}{\rho g S} \operatorname{sgn}(h_{,z}) = 0 \quad (96)$$

qui correspond à  $Fr = 1$  et également à l'énergie minimale de l'écoulement ' $E_{\min}$ ' où :

$$E_{\min} = \frac{3}{2} h_c + h_\phi \operatorname{sgn}(h_{,x}) \left[ \frac{1}{2} + \ln \left( \frac{h_c}{h_\phi} \right) \right] \quad (97)$$

Donc, comme dans l'hydraulique classique ( $E_{\min} = (3/2)h_c$ ) avec un terme supplémentaire dû aux contraintes élongationnelles.

Dans une section rectangulaire, l'équation (96) devient :

$$\cos(\theta) h^3 + \frac{s \phi}{\rho g} \operatorname{sgn}(h_{,z}) h^2 - \frac{\beta q_v^2}{g} = 0 \quad (98)$$

Pour calculer  $h_c$ , il faut donc résoudre une équation de troisième degré, la solution existe mais on présentera pas ce calcul. Si  $h$  décroît suivant la direction de l'écoulement, la solution

de l'équation (98) a été approchée par Piau (1996), comme suit :

$$h_c = h_{ch} + \frac{\varphi S}{3\rho g \cos\alpha} \quad (99)$$

où :  $h_{ch}$  est la hauteur critique de l'hydraulique classique :

$$h_{ch} = \left( \frac{\beta Q^2}{g \cos\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (100)$$

### Pente critique

Considérant un canal de section rectangulaire et de pente variable portant un débit constant. On définit la pente critique " $\theta_c$ " comme étant la pente pour laquelle la hauteur normale est égale à la hauteur critique ( $h_n = h_c$ ). Pour calculer  $\theta_c$ , on associe les équations du régime uniforme à l'équation du régime critique (équation (96)). Le procédé de calcul est numérique.

### 1.5.6 Evaluation de la pente de frottement J

D'abord signalons que pour bien évaluer la pente de frottement  $J$ , on devrait tenir compte de tous les régimes d'écoulement proposés par Piau. Donc, on devrait retrouver les propriétés de l'écoulement uniforme loin de la chute, le régime graduellement varié avec une surface seuil et enfin le régime graduellement varié en écoulement.

On reproduit ici la même hypothèse que tous les hydrauliciens utilisent (utilisée également par Coussot 1994). On suppose que la contrainte moyenne à la paroi dans une section quelconque d'un écoulement graduellement varié est égale à la contrainte moyenne à la paroi de l'écoulement uniforme ayant les mêmes valeurs du débit et de la hauteur locale. Notons que le seul avantage de cette manière d'évaluer  $J$  est que les propriétés de l'écoulement uniforme loin de la chute sont respectées. Les inconvénients sont cependant nombreux. En effet, cette approximation revient à supposer l'existence dans l'écoulement graduellement varié, quelle que soit l'abscisse, d'une zone rigide. Evidemment, cela ne peut être exactement vrai que si la profondeur du fluide est uniforme. On espère néanmoins tourner ce problème en augmentant la résistance hydraulique par le terme élongationnelle suggéré par Piau. D'autre part, le régime graduellement varié avec des zones rigides n'est pas du tout pris en compte. En effet, puisque ici la pente de la surface libre est nulle, l'expression de Piau (86) établie en particulier dans la zone en écoulement, donne des valeurs des contraintes élongationnelles nulles, et par conséquent on sous estime la vraie valeur de la pente de frottement dans cette région.

Compte tenu de cette approximation, la pente de frottement (représentée à travers le

nombre d'Oldroyd) dans chaque tranche de l'écoulement graduellement varié devrait obéir à la même équation que dans l'écoulement uniforme, soit donc pour une section rectangulaire (voir I.3.5) :

$$T_s = T_s(n, Od) = \frac{g(n, Od)}{Od} \quad (101)$$

où le nombre adimensionnel  $T_s$  a été introduit, rapport des contraintes visqueux aux contraintes plastiques :

$$T_s = \frac{\bar{\tau}_w(s=0)}{s} = \left( \frac{k}{8s} \right) \left( \frac{q_v}{bhD_H} \right)^n \alpha(n, \hat{x}) \quad (102)$$

Les fonctions  $\alpha(n, \hat{x})$  et  $g(n, Od)$  sont évaluées par la pondération du diamètre hydraulique en se référant à une section plane (équations (69) et (70), respectivement). Faut de mieux,  $Od_c(\hat{x})$  est pris égal à 1.

Il est plus avantageux si on disposait d'une relation explicite de  $Od$  en fonction de  $T_s$ . On a alors établi à partir de l'équation (101) les asymptotes suivantes :

$$Od \approx \begin{cases} \frac{1}{T_s + 1} & Od \approx 0 \quad (T_s \gg 1) \\ \left( \frac{n+1}{2n+1} \right)^n \frac{1}{T_s^{\frac{1}{n+1}} + 1} & Od \approx 1 \quad (T_s \ll 1) \end{cases} \quad (103)$$

Se servant de ces deux asymptotes comme valeurs initiales, on peut résoudre numériquement l'équation (101), puis déduire  $J$  à partir de l'équation suivante :

$$J = \frac{4s}{\rho g D_H Od} \quad (104)$$

Pour la résolution, on a utilisé la méthode de Newton.

Il apparaît donc que le nombre d'Oldroyd dans l'écoulement graduellement varié ne peut dépendre que du nombre  $T_s$  et de l'indice  $n$ . Il convient même de garder seulement l'influence de  $T_s$ , vu la faible dépendance du terme  $g(n, Od)$  à la variation de  $n$ . D'autre part, d'après cette approximation, la relation qui relie le coefficient de perte de charge  $\Lambda$  au nombre de Reynolds  $Re_{HB}$  (équation (39) établie en écoulement uniforme) devrait rester également valable dans chaque tranche de l'écoulement graduellement varié. Mais comme nous allons voir dans la suite, cela est loin d'être toujours le cas.

### 1.5.7 Etude qualitative systématique et classification

Les formes possibles des profils de la surface libre restent identiques à celles déjà établies en hydraulique classique. Elles sont déduites à partir de l'équation (39). Son premier membre  $h_{,z}$  est la pente de la surface libre rapportée au fond du canal ( $h$  est mesurée positivement vers le haut). Son second membre peut être discuté en relation avec la valeur respective des profondeurs normale et critique. On trouve donc un régime fluvial si toutes les hauteurs sont supérieures à la hauteur critique ou bien un régime torrentiel dans l'autre sens et enfin un régime critique dans le cas limite.

### 1.5.8 Calcul du profil de la surface libre

On a choisi dans notre étude d'utiliser une méthode de résolution par approximations successives. Faut de mieux, la valeur de  $\varphi$  a été évaluée expérimentalement comme indiquée précédemment et encore par ajustement de l'ensemble des résultats des profils de la surface libre à la théorique (équation (91)) en utilisant l'approximation locale pour représenter la pente de frottement (équivalent uniforme).

On choisit d'abord plusieurs valeurs de  $\varphi$  (entre 0 et 3). Pour chaque valeur  $\varphi_j$ , on résout numériquement l'équation (91). La dérivée de  $h$  est approchée par une différence dont on remplace  $h_{,x}$  par  $\Delta h / \Delta x$  où  $\Delta$  représente une différence entre deux valeurs proches, soit :

$$x_{i+1} = x_i - \left( \frac{\cos\alpha - \beta \frac{q_v^2}{gh_i^3} + \varphi_j \frac{s}{\rho gh_i} \operatorname{sgn}(h_{,x})}{\sin\alpha - J_i(h_i)} \right) \Delta h \quad \text{avec} \quad h_{i+1} = h_i + \Delta h \quad (105)$$

On calcule ensuite la somme des résidus  $S_j = \sum (x_{\text{théorique}} - x_{\text{expérimental}})^2$  qui correspond à la valeur  $\varphi_j$ . On prend à la fin la valeur de  $\varphi$  qui convient avec la valeur minimale de  $S_j$ . On trouve  $\varphi$  qui varie entre 1.5 et 2 pour un assez nombre de configurations de l'écoulement. On propose la valeur  $\varphi \approx 1.5$  qui semble être raisonnable dans cette situation d'écoulement, et aussi, comme nous allons voir dans le problème de rupture de barrage.

Pour comparer les résultats obtenus, on a employé le même procédé de résolution avec la valeur  $\varphi = 1.5$  et en utilisant la loi de frottement semi-théorique proposée plus haut (équation (101)).

### 1.5.9 Autre considération relative à l'hypothèse de l'écoulement équivalent uniforme

Si on admet que l'hypothèse locale est valable, i. e que l'écoulement graduellement varié se comporte localement comme un écoulement uniforme, il convient de vérifier (voir ) dans chaque section de l'écoulement, que la répartition de vitesse est de la forme :

$$\frac{w}{w_s} = \begin{cases} 1 - \left( \frac{1 - Od - y^+}{1 - Od} \right)^{\frac{n+1}{n}} & \text{si } y^+ (= y/h) < 1 - Od \\ 1 & \text{si } y^+ > 1 - Od \end{cases}$$

où  $w_s$  et  $Od$  sont respectivement la vitesse maximale et le nombre d'Oldroyd qui correspondent à la profondeur locale  $h$ , mais comme nous allons voir dans la suite, cela est loin d'être le cas.

## 1.6 Application et résultats

### 1.6.1 Fluides utilisés dans nos expériences

Le fluide à seuil qu'on a testé est une solution d'eau et de Carbopol déjà mis en œuvre dans plusieurs travaux antérieurs au laboratoire (Belhadri 1996). Le Carbopol est une résine soluble en milieu aqueux, c'est un polymère obtenu à partir de la résine Carbopol 940 de B.F. Goodrich Company, de masse volumique 1000 g/l et de masse moléculaire  $M = 2,4.10^6 \text{ g/mol}$ . En solution et après neutralisation à l'aide d'une base minérale telle que la soude, une ionisation de la résine conduit à un épaissement instantané. La consistance du produit dépend fortement de la concentration et du pH. Pour de faibles valeur du pH, la solution est très fluide. Ensuite, la consistance augmente pour atteindre un plateau entre pH=7 et pH=8. Le seuil de contrainte est une propriété rhéologique importante, la consistance et l'indice de rhéofluidification sont également des paramètres rhéologiques de ce fluide.

La préparation du produit s'effectue en plusieurs étapes. Les études paramétriques de Belhadri (1996) ont permis d'établir une correspondance entre le seuil et la concentration. On choisit le seuil du fluide, puis on cherche dans les tables la correspondance en concentration. Une fois que la concentration massique ( $C_m$ ) est fixée ainsi que la masse d'eau distillée ( $m_0$ ) nécessaire à nos expériences, on détermine la masse ( $m$ ) de Carbopol en poudre à ajouter dans l'eau distillée.

Pour la préparation de la solution on se sert de la trémie de la plate forme. Pour la préparation, on a besoin également de plusieurs coupelles en aluminium, d'une barquette en aluminium, de

cuillères et d'un récipient de 2 litres. On nettoie tout le matériel qui doit être très propre et on le rince à l'eau distillée. Avant de mélanger le fluide, une quantité de Carbopol est mise dans la barquette pour être déshydratée dans une étuve à une température de 75°C pendant 24 heures. Ce temps écoulé, on le verse ensuite dans les différentes coupelles posées sur une balance électronique (de 0.01 g de précision) afin d'avoir une masse  $m$  de Carbopol. On remplit le seau d'eau distillé de masse  $m_0$ . On en prélève ensuite une petite quantité qu'on introduit dans le petit récipient. Dans cette petite quantité, on verse la poudre de Carbopol très doucement tout en mélangeant avec un malaxeur et en raclant la résine sur les parois du récipient et sur l'axe du malaxeur. Il est important d'augmenter la vitesse progressivement en passant de 0 à 1500 tr/mm. Le malaxage dure à peu près 30 mm. Une fois que le mélange est bien homogène, on l'incorpore doucement au reste de l'eau distillée. On mélange le tout avec un malaxeur dont la pale est placée à une profondeur telle que l'air n'entre pas dans la dispersion pour éviter la formation de bulles d'air. Ce malaxeur est de plus grand calibre que le précédent et on lui impose une vitesse de 500 tr/mm. On laisse le malaxeur en marche tout un après midi de sorte que la solution ne contienne pas de grumeaux (quelques jours si le fluide est destiné au grand canal). La solution qui est encore très liquide doit se reposer toute la nuit.

On vérifie que le mélange est sans impureté (bulle, poussière,...). On neutralise ensuite la solution en lui incorporant progressivement à peu près 1% de soude (NaOH de concentration 1 mol/l) par rapport au volume total de la solution tout en mélangeant avec une vitesse très faible (300 tr/mm). Le mélange se poursuit jusqu'à ce que le fluide soit bien homogène. On mesure le pH de la solution pour vérifier que le fluide est au maximum de sa consistance, et on rajoute de la soude si cela est nécessaire. Le fluide ainsi obtenu est maintenu au repos toute une journée avant d'être utilisé.

## 1.6.2 Etude rhéométrique du fluide

Pour effectuer l'étude expérimentale, il est indispensable de connaître le comportement mécanique du fluide testé. C'est tout l'intérêt de la rhéologie qui est définie comme la science de la matière en écoulement. Cette définition n'impose aucune contrainte à cette matière et implique la rhéométrie qui est la technique de mesure des relations contrainte-écoulement et contribue à identifier la loi de comportement du matériau. En rhéométrie l'étude expérimentale consiste essentiellement à appliquer des écoulements simples et soigneusement contrôlés afin de valider cette loi de comportement et d'évaluer les paramètres intervenants

dans la loi. Celle-ci est ensuite intégrée dans les équations du mouvement afin d'étudier des écoulements plus complexes, écoulements à surface libre dans notre cas.

On a utilisé pour la caractérisation des produits deux types de rhéomètres : un à contrainte contrôlée et l'autre à vitesse contrôlée (Carri-med CSL100 et Weissenberg, respectivement) :

### Rhéomètre à contrainte contrôlée

Dans cet appareil, le couple est appliqué et contrôlé par un moteur électronique à induction. Les parties tournantes sont supportées par un système de coussins d'air pour diminuer le frottement entre les parties fixes et mobiles. La vitesse angulaire peut être mesurée dans la gamme de  $4 \cdot 10^{-4}$  à 50 rad/s. La précision sur la contrainte est de 5% et celle de la déformation est de 0.5%. La régulation de température est assurée par effet Peltier.

### Rhéomètre à vitesse de déformation contrôlée

Le rhéomètre Weissenberg travaillant à un gradient de vitesse de déformation imposé permet d'effectuer des essais de démarrage et permet d'établir les courbes d'écoulement en régime permanent. Le plateau inférieur est entraîné par un moteur à vitesse contrôlée et permet la mesure du couple transmis par l'échantillon. Une caractéristique essentielle du rhéomètre est son accélération de  $10^5 \text{ rad/s}^2$  garantissant des temps de montée inférieurs à 20 ms et des pulsations de 100 rad/s. Un codeur optique asservit la position du plateau avec précision de  $5 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$

### Géométrie utilisée

Notre choix s'est porté sur le système cône plan. Le principe de cette géométrie est le cisaillement du fluide entre un plan et un cône tronqué coaxiaux en rotation à des vitesses différentes (pour plus de détails voir le chapitre sur le problème de rupture de barrage). Le grand avantage de cette géométrie réside dans le fait que le gradient de vitesse est homogène dans l'intervalle tant que l'angle du cône est respecté (inférieur à  $6^\circ$ ), l'utilisation des échantillons de petits volumes et la facilité de la manipulation en rotation à des vitesses différentes.

Dans l'hypothèse de l'inertie négligeable (le nombre de Reynolds est petit), les équations du mouvement se simplifient et permettent de déterminer séparément :

- le gradient de vitesse en fonction de la vitesse angulaire ( $\Omega$ ) et de l'angle du cône ( $\alpha$ ) :

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega}{\alpha}$$

- la contrainte en fonction du couple ( $C$ ) et du rayon de l'échantillon ( $R$ ) :

$$\tau = \frac{3}{2\pi} \frac{C}{R^3}$$

## Phénomènes perturbateurs

Aux faibles gradients de vitesse, des phénomènes perturbateurs peuvent apparaître lors de l'expérimentation, tels que le glissement, l'évaporation, la fracturation et le creusement.

Le glissement est le phénomène perturbateur le plus important. Il apparaît lorsqu'on utilise des outils dont les surfaces en contact avec le matériau sont trop lisses. Ce phénomène apparaît à l'interface entre le fluide et le corps de mesure. Une discontinuité de la vitesse au niveau de la paroi peut se produire (cf. Magnin & Piau 1987). Dans ce cas on mesure le frottement du fluide sur le corps de mesure et non la résistance du matériau au cisaillement. On observe alors une brusque chute de viscosité facilement discernable surtout au niveau des faibles gradients de vitesse. Pour éviter ce problème, on a utilisé des surfaces rugueuses en collant sur les surfaces de mesure de la toile émeri, avec des grains de 0.2 mm.

L'évaporation est un phénomène qui résulte du contact de l'air ambiant avec la surface libre du matériau. Ces effets deviennent importants surtout lorsque les essais nécessitent des durées très importantes. Le fluide s'évapore induisant des modifications de la concentration du mélange et du diamètre cisailé. Pour remédier à ce phénomène, on a utilisé un système parmi ceux mis au point par Magnin & Piau (1990). Il s'agit d'une boîte en Plexiglas, transparente, dont la circonférence est tapissée de mousse imbibée d'eau. Autour de la surface plane inférieure, le système comporte une rigole pleine d'eau, ce qui permet de garder l'atmosphère saturée en vapeur d'eau. Ce procédé permet de réaliser des essais pendant plusieurs heures, sans remarquer d'anomalie due à l'évaporation.

La fracturation est observée dans plusieurs matériaux, pour des vitesses de cisaillement modérées. Elle se manifeste par une discontinuité du profil de la vitesse au sein du matériau et non à l'interface comme le cas du glissement. Ce phénomène est déclenché probablement par une inhomogénéité au sein de l'échantillon. La détection de ce phénomène se fait de la même façon que le glissement, en visualisant le champ de déformation dans l'échantillon au cours de l'essai par de fines marques verticales. Dans le cas où une ligne de discontinuité apparaît au niveau de la paroi, il s'agit du phénomène de glissement. Dans l'autre cas, elle se produit au sein du matériau, il s'agit d'une fracturation.

Ce phénomène apparaît au niveau de la surface libre du fluide qui se creuse de plus en plus, alors que certaines parties au niveau du contour ne sont plus cisailées. Ce phénomène se produit dans la plupart des cas de manière rapide au démarrage puis évolue lentement au cours de l'expérience. Dans le cas où ce phénomène se produit au sein d'un matériau, le

volume de l'échantillon cisailé est inférieur au volume initial. Cela impose certaines corrections dans les calculs effectués en tenant compte du volume du matériau réellement cisailé.

### Résultats obtenus en rhéométrie

Les résultats obtenus en Rhéométrie avec des gels de Carbopol (figure 10) montrent que ce fluide est du type Herschel-Bulkley. Le modèle s'écrit en cisaillement simple, comme suit :

$$\tau = s + k|\dot{\gamma}|^n \quad \text{si } \tau < s$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{si } \tau \leq s$$

où  $s$  est le seuil de contrainte,  $k$  est la consistance du fluide et  $n$  est l'indice de rhéofluidification.  $\tau$  étant la contrainte et  $\dot{\gamma}$  étant le gradient de vitesse. Les valeurs des paramètres de la loi sont obtenues par ajustement de la courbe théorique sur la courbe expérimentale.

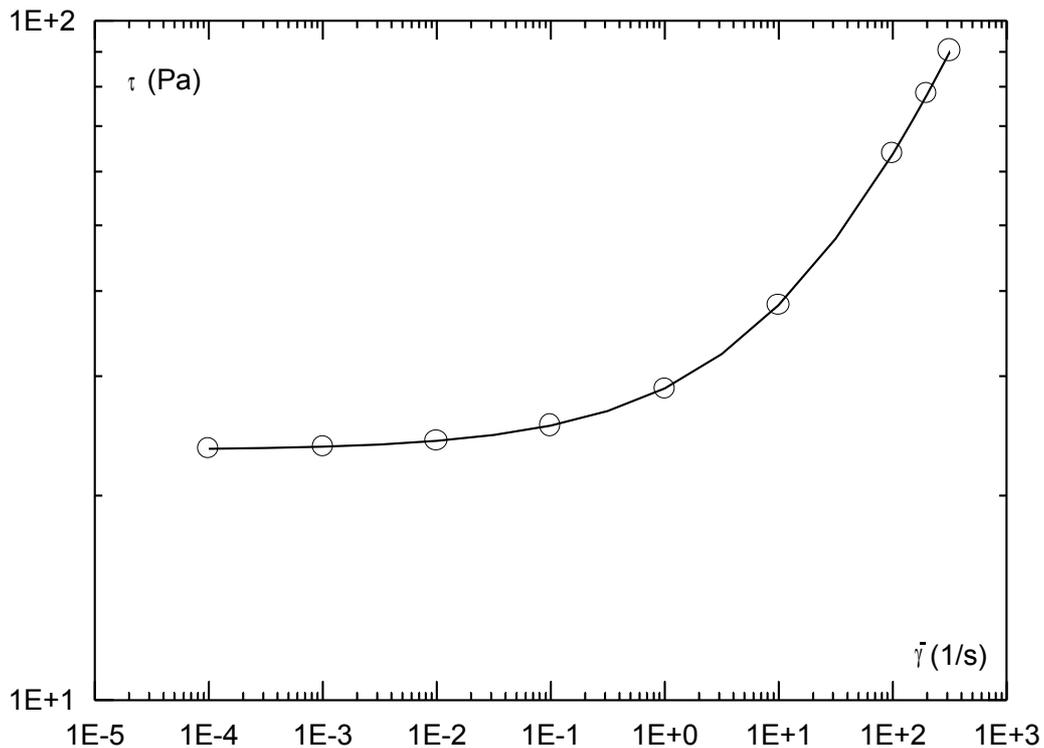


Figure 10: Courbe d'écoulement pour un gel de Carbopol ( $C_m=0.16\%$ )

O Expérience, — Analyse (H-B)

La figure 11 montre l'influence de la température sur les propriétés du gel de Carbopol. A titre exceptionnel, les courbes d'écoulements sont représentées en échelle linéaire, car en échelle logarithmique l'écart n'apparaît pas. Ce graphe indique donc la faible sensibilité du gel de Carbopol aux variations de la température.

Écoulement uniforme et écoulement graduellement varié en régime laminaire

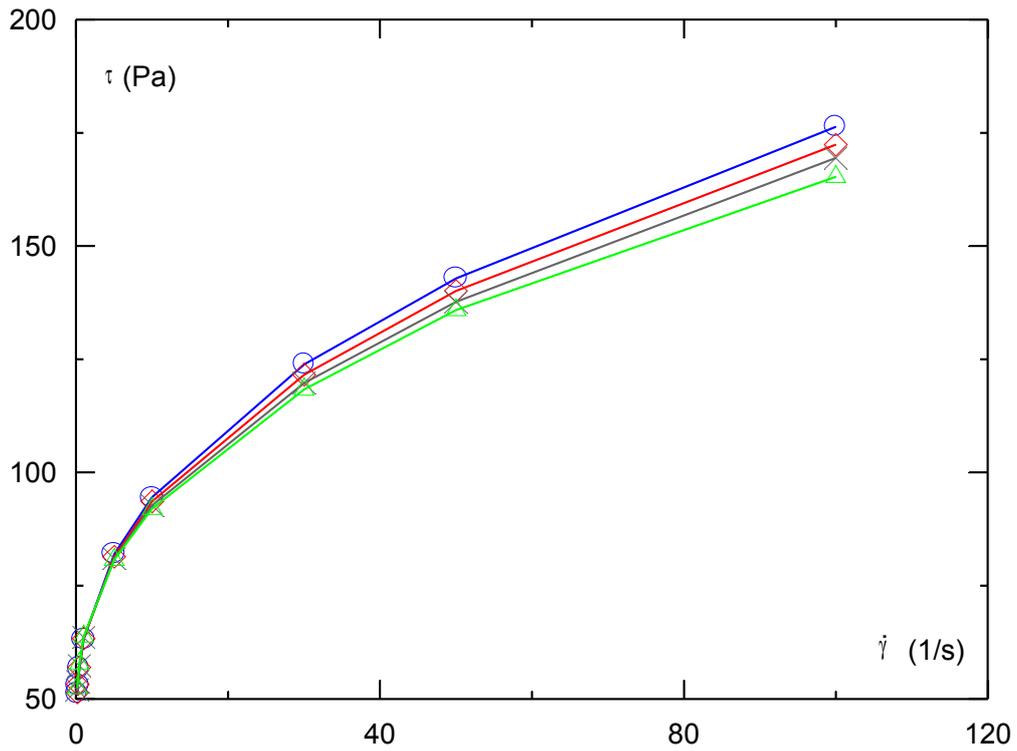


Figure 11: L'effet de la température sur un gel de Carbopol ( $C_m=0.5\%$ )

—○—  $T=15\text{ }^\circ\text{C}$  —◇—  $T=20\text{ }^\circ\text{C}$  —×—  $T=25\text{ }^\circ\text{C}$  —△—  $T=30\text{ }^\circ\text{C}$

Ces résultats ont été obtenus en collant du papier rugueux (0.2 mm) sur les surfaces du cône et du plan.

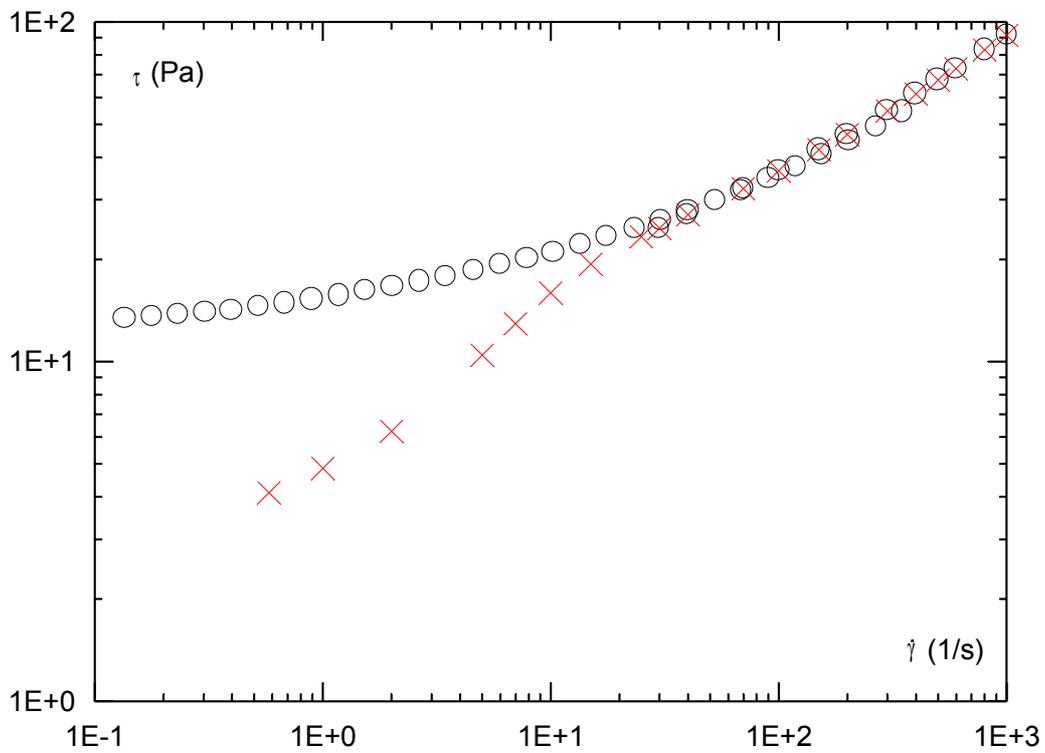


Figure 12: Courbe d'écoulement pour un gel de Carbopol ( $C_m=0.1\%$ )

O Parois rugueuse, × Parois lisses en Plexiglas

D'autres essais ont été réalisés avec des parois lisses qui montrent (figure 12), pour un gradient de vitesse donné, une diminution de la contrainte par rapport au cas précédent (avec surfaces rugueuses). Cela est dû essentiellement au phénomène de glissement.

### Précautions à prendre

L'étude rhéométrique menée révèle quelques problèmes à éviter pour la bonne marche de nos essais d'écoulements à surface libre. Ces problèmes sont surtout liés aux propriétés intrinsèques des fluides utilisés.

L'un de ces problèmes, est celui des bulles d'air qui peuvent rester emprisonnées à l'intérieur du gel de Carbopol à cause du seuil de contrainte. Ceci entraîne la non-homogénéité du fluide. Ces bulles sont formées lorsqu'un jet entre en contact avec une surface libre du fluide. Elles peuvent se manifester intensément dans le grand canal où le fluide est en circulation dans plusieurs conduites. Le premier remède à ce problème est de bien préparer le fluide (respect de la vitesse de malaxage). De plus, dans le grand canal, un mécanisme permettant de réduire la formation de ces bulles d'air a été conçu. Ce mécanisme tend à réduire l'énergie cinétique en minimisant l'énergie potentielle (pour avoir plus de renseignements sur ce mécanisme, nous envoyons les lecteurs à la thèse d' Ayadi (1996)).

L'évaporation du produit (problème lié également aux conditions dans lesquelles nos expériences ont été réalisées) provoque l'augmentation de la concentration, donc la variation des paramètres rhéologiques du fluide. Pour compenser ces effets, des échantillons ont été prélevés à chaque essai. On en détermine systématiquement les paramètres rhéométriques, la concentration (dans le cas du gel de Carbopol) et la masse volumique, et on rajoute de l'eau si cela est nécessaire.

La concentration du gel de Carbopol est mesurée par deux procédés. Dans le premier, une quantité du fluide (environ 50g) est pesée, puis mise dans l'étuve jusqu'à l'évaporation complète de l'eau (105°C, 48h) ; on calcule alors la concentration massique du mélange. Dans le deuxième procédé nous avons utilisé un dessiccateur avec balance. Cet appareil sert à éliminer rapidement l'humidité contenue dans l'échantillon. On a utilisé un mode de fin d'analyse semi-automatique où la dessiccation s'arrête dès que la perte de poids se situe en dessous de la valeur seuil préalablement fixée (en mg ou en %) pour un espace de temps également prédéfini. La température de réglage varie de 40 à 160 °C. Le poids de l'échantillon maximal doit être inférieur à 40 g. La précision de lecture est de 0.01 % si le poids de l'échantillon est supérieur à 5 g, et de 0.05 % si le poids de l'échantillon est inférieur à 5 g. On déduit alors l'erreur de nos mesures qui est de 0.06%.

La masse volumique est mesurée à l'aide d'une balance de portance maximale 3 kg (précision 0.01g) et d'un récipient dont le volume (V) est calibré. Le calibrage du récipient est effectué en le pesant une fois vide ( $m_0$ ) et une deuxième fois rempli d'eau ( $m_a$ ). Ainsi, en pesant ce même volume rempli du fluide, on déduit à partir de :

$$\rho = \left( \frac{m_f - m_0}{m_a - m_0} \right) \rho_a$$

où  $\rho_a = 1000 \text{ Kg}/\text{m}^3$  est la masse volumique de l'eau, la masse volumique du produit  $\rho$ . L'erreur commise est de l'ordre de 1%.

A priori le fluide est pollué par plusieurs matériaux (poussières, rouille...) provenant du milieu extérieur. Il conserve le type du comportement, mais ce problème est potentiellement très gênant pour le gel de Carbopol. Le pH des solutions tombe en général. Ce qui tend à diminuer la consistance du fluide. Pour compenser ces effets des échantillons ont été prélevés à chaque essai. On en détermine systématiquement leurs paramètres rhéométriques. Le pH du gel de Carbopol est contrôlé à l'aide d'un pH-mètre. Les mesures sont dans l'intervalle compris entre 6.8 et 7.15.

Le glissement est une propriété de certains matériaux qui se manifeste au contact du fluide avec une paroi lisse. En rhéométrie, ce phénomène est déjà mis en évidence dans plusieurs travaux antérieurs au laboratoire. Etend donné la nature des parois constituant les deux canaux utilisés (parois lisses), on peut s'attendre à l'apparition de ce phénomène dans les écoulements à surface libre. Ainsi, pour détecter la moindre apparition d'un glissement macroscopique, on a introduit verticalement dans l'écoulement du marquage fait de traits du fluide additionné d'un peu d'argile rouge, ce qui ne change pratiquement pas les propriétés et caractéristiques. Pour étudier le problème sans risque d'apparition de ce phénomène de glissement, on a collé, comme en rhéométrie, au fond du canal du papier avec des rugosités de 0.2 mm.

### 1.6.3 Dispositifs expérimentaux utilisés

Afin de reproduire les écoulements types de l'hydraulique classique (Écoulements permanents et le problème de rupture de barrage), deux dispositifs expérimentaux ont été utilisés. Le premier, appelé grand canal, a été construit au laboratoire avec un système pour la recirculation du fluide (Ayadi 1996). Le deuxième, appelé petit canal (voir le chapitre sur le problème de rupture de barrage), est moins long que le premier, mais il présente l'avantage d'être plus accessible. Le grand canal est utilisé spécialement pour l'étude de l'écoulement permanent, par contre, le petit canal est utilisé pour l'étude du problème de rupture de barrage. Ces deux dispositifs expérimentaux sont construits à l'échelle du laboratoire. Cependant, les

dimensions et la nature de leurs matériaux constitutifs sont soigneusement choisis afin de fournir une base pour simuler des phénomènes aux autres échelles.

### Plate-forme expérimentale

Pour comprendre les phénomènes qui apparaissent en écoulement permanent, on a utilisé la même plate-forme que Ayadi (1996). La plate-forme (figure 13) est constituée essentiellement d'une pompe Moineau, une trémie, un système permettant la variation du débit, un canal en Plexiglas, un système de mesure du débit, un chariot porte instrument et d'un palan variateur d'inclinaison.

Le canal en Plexiglas (1) est de longueur 5 m, hauteur 100 mm et de largeur 300 mm. Le dispositif est conçu pour transporter des débits jusqu'à 10 l/s. La pompe (2) à vis hélicoïdale est entraînée par un moteur d'une puissance de 15kw. Cette pompe à débit imposé de 10 l/s assure le transfert des particules de 5 mm de dimension maximum. La trémie (3) est fixée sur la pompe. Au fond de la trémie, il y a une grille en acier inoxydable de 5 mm de mailles afin de filtrer tous les objets dépassant la taille de 5 mm et de ne pas endommager la pompe. Le rôle principal de cette trémie est le stockage du produit pendant l'arrêt de la pompe ainsi que la préparation des mélanges.

Le fluide est refoulé par la pompe dans un tuyau d'alimentation de 250 mm de diamètre pour qu'il arrive à l'entonnoir variateur de débit. Le système permettant la variation du débit (5b) est constitué d'un entonnoir rectangulaire en acier inoxydable, il possède une ouverture étroite dont la superficie est réglable. L'ouverture maximale de l'entonnoir est de 250 mm x 100 mm et la course totale de l'entonnoir variateur de débit est égale à 250 mm. Le jet du fluide sortant de l'entonnoir est divisé en deux parties. L'un sera versé dans le bac d'alimentation du canal et l'autre passe dans un réservoir appelé trop plein (5c) en acier inoxydable. Ce trop plein est connecté à un tuyau de retour (5d) qui conduit le fluide à la trémie, puis vers la pompe pour former la boucle de recirculation. Le fluide sortant du canal sera versé dans la contre goulotte (7) de forme courbée en acier inoxydable dans laquelle passe le fluide avant son arrivée dans le système d'aiguillage. Le système d'aiguillage est constitué d'un volet en acier inoxydable qui divise en deux parties l'espace intérieur d'un corps en PVC. La rotation du volet est manœuvrée par un volant situé à un mètre. A l'intérieur de ce système d'aiguillage, on trouve 2 entonnoirs rectangulaires qui sont munis de grilles en acier inoxydable pour filtrer les objets dépassant 5 mm de taille. Les extrémités de ces 2 entonnoirs sont liées à 2 tuyaux. L'un de ces tuyaux est immergé dans le bac de pesée du système de mesure de débit, l'autre est plongé dans la trémie pour former la boucle de recirculation.

## Écoulement uniforme et écoulement graduellement varié en régime laminaire

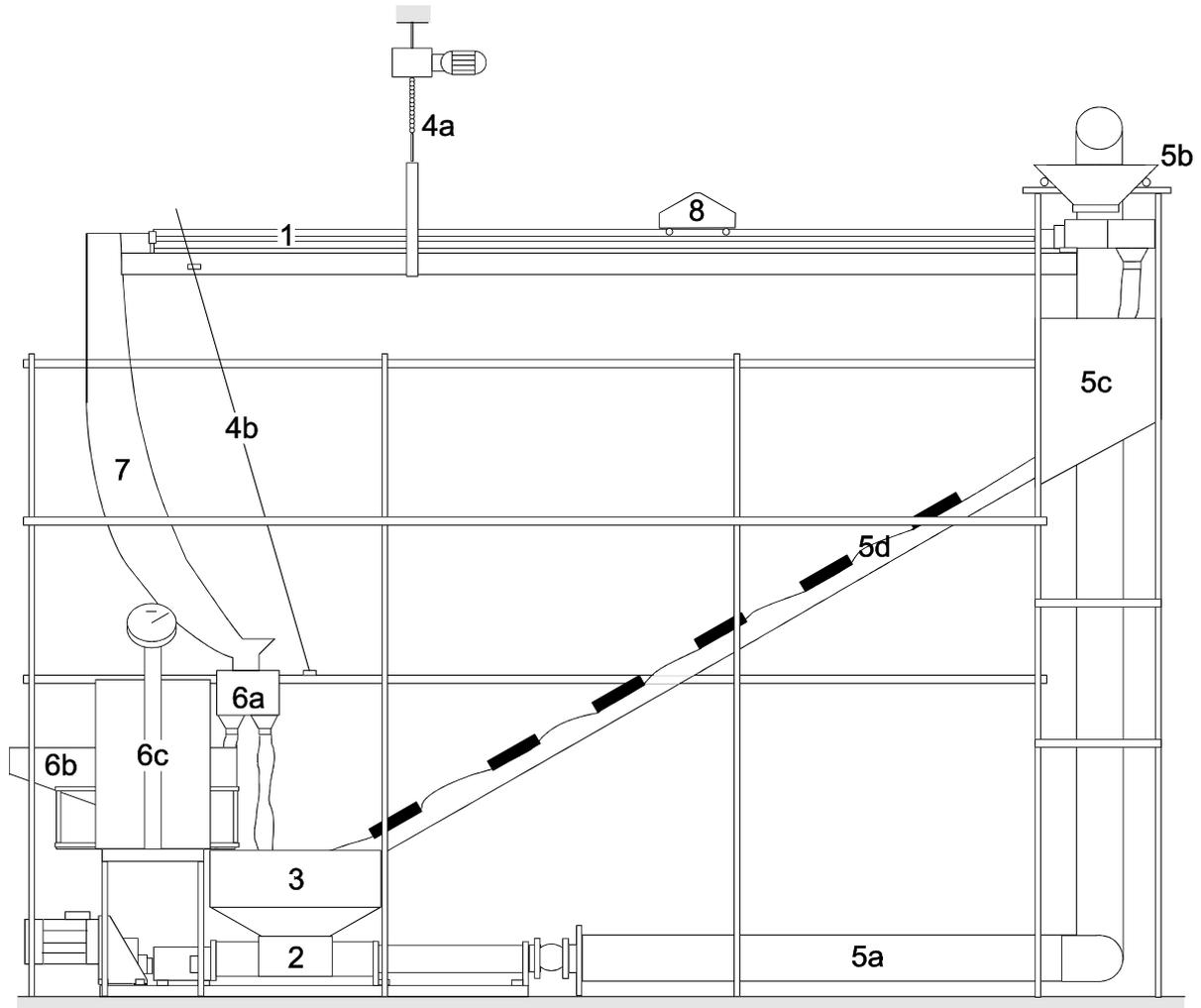


Figure 13: Dispositif expérimental destiné à l'étude des écoulements permanents

- 1: Canal
- 2: Pompe
- 3: Trémie
- 4a: Variateur d'inclinaison
- 4b: Système de mesure d'angle
- 5a: Tuyau d'alimentation
- 5b: L'entonnoir variateur du débit
- 5c: Bac trop plein
- 5d: Tuyau de retour
- 6a: Bascule
- 6b: Système de mesure du débit
- 6c: Bac
- 7: Contre goutte
- 8: Chariot porte instruments

Deux rails porte chariot sont fixés aux cotés du canal sur le bâti porte canal. Aux extrémités de ces 2 rails, il y a 2 butées pour limiter la course du chariot porte instrument. Le chariot porte instrument (8) possède 3 galets : deux en forme de U du même côté pour le

guidage et un cylindre pour l'équilibre et la formation d'un appui plan. La lecture de la position du chariot se fait sur une règle collée sur le bâti porte canal ou bien sur un papier millimétré collé au fond du canal. Ce chariot possède des trous pour pouvoir monter d'autres instruments tels que la jauge pour la mesure de hauteurs et la sonde laser pour la mesure de la vitesse.

Pour que l'expérimentateur puisse accéder à tous les coins de la plate forme, trois paliers faisant partie des échafaudages (situés à 2, 3 et à 4 m du sol) ont été construits. L'accès à ces trois paliers est assuré par des escaliers métalliques.

Pour plus de détails sur cette installation, se reporter à la thèse de Ayadi (1996).

### **Mesure et variation de l'inclinaison du canal**

Un palan variateur d'inclinaison (4a) à 2 vitesses fixé au plafond du bâtiment, soulève le bâti porte canal et permet le changement d'inclinaison. La mesure de cette dernière se fait par lecture indirecte sur une règle graduée appelée règle de mesure d'inclinaison (4b). L'erreur commise dans la lecture est négligeable. L'inclinaison maximale du canal est de 30°.

### **Mesure du débit**

Au-dessus de la trémie, se trouve un système de mesure de débit (6b), il se constitue d'une bascule (6a) de capacité de 300 kg, d'un bac en PVC (6c) de même capacité (300L) et d'un chronomètre digital au 1/100 de seconde. Le fond du bac est percé d'un trou de vidange de 50 mm de diamètre permettant de vider le bac une fois que la mesure du débit est effectuée. Le fond du bac est constitué d'une paroi inclinée qui converge vers le trou de vidange pour faciliter l'évacuation.

On commence toujours l'expérimentation lorsque la variation du débit se situe en dessous de 0.1 % pour un espace de temps prédéfini (environ 5 mn). Avant ce régime quasi-permanent, la fluctuation du débit atteint parfois 4%.

### **Système de mesure de profondeurs**

Étant donné que l'écoulement est permanent, pour mesurer les profondeurs on a utilisé une jauge de profondeur à affichage digital par cristaux liquides munie d'une pointe (au centième de millimètre). Le prélèvement des mesures se fait manuellement. Cet instrument ainsi que la sonde laser sont fixés à un socle porte jauge lié à son tour au chariot par une liaison glissière. Cette liaison permet un déplacement perpendiculaire à l'axe du canal. Un système vis-écrou est placé entre le socle et un plateau afin d'obtenir un déplacement transversal fin et précis.

### **Mesure de vitesses locales**

Lorsque deux faisceaux issus d'un laser sont focalisés sur un même volume de fluide, il y aura formation de frange d'interférence ; l'expression de l'interfrange  $d$  est :

$$d = \frac{\lambda}{2\sin(\theta / 2)}$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la lumière et  $\theta$ , l'angle formé par les deux faisceaux.

Si des particules entraînées par l'écoulement traversent la zone d'interférence, elles franchissent tour à tour des régions éclairées et des régions obscures ; La lumière qu'elles diffusent et qui est reçue par un capteur optique est donc modulée à une fréquence  $f_D$  (fréquence Doppler), fonction des particules et de la valeur de l'interface  $d$  :

$$f_D = \frac{u}{d} = \frac{2u}{\lambda}\sin(\theta / 2)$$

$u$  étant la composante de la vitesse du fluide perpendiculaire aux franges.

Ceci représente le principe du moyen utilisé dans notre étude pour mesurer les vitesses locales. Il s'agit du velocimètre laser à effet Doppler (DANTEC laser Doppler velocimetry system). Le système est composé essentiellement d'une sonde laser à Argon-Krypton, un émetteur, un récepteur, un câble en fibre optique de 10 m de longueur, une unité BSA (burst spectrum analyzer), d'une sonde (émetteur-récepteur) et d'un ordinateur. L'émetteur décompose le rayon venant de la source laser en ses composantes de couleur principales, puis divise chaque couleur en deux faisceaux lumineux avec une différence de fréquence de 40 MHz. Nos expériences ont été réalisées avec une lumière verte (puissance 4W, longueur d'onde 514.5 nm). L'émetteur est connecté à une boîte de distribution des fibres. Celle-ci sert comme interface entre la sonde, la fibre réceptrice et la fibre émettrice. La sonde permet d'obtenir des faisceaux de rayons lumineux parallèles. L'objectif focal permet d'une part la mise en point des rayons et d'autre part l'établissement du volume de mesure nécessaire. Dans notre configuration, la longueur focale est de 160 mm, la séparation des deux faisceaux est de 38 mm et l'angle d'intersection est de 0.236 rad. On obtient ainsi un volume de mesure d'environ 122  $\mu\text{m}$  de largeur et 1.52  $\mu\text{m}$  de longueur, avec un espacement de frange de 3.23  $\mu\text{m}$ . A la sortie de la fibre réceptrice, la lumière est orientée afin d'alimenter le photomultiplicateur. Finalement, le DANTEC BSA traite le signal par l'intermédiaire d'un ordinateur.

Ce système fournit des mesures avec une erreur estimée à 0.1 cm/s. Le procédé utilisé est le suivant : On choisit une station d'abscisse  $x$ . Ensuite, on place le volume de mesure tel que celui-ci coïncide avec le fond du canal (la vitesse mesurée à cet endroit est nulle compte tenu de la condition d'adhérence à la paroi). Après, on déplace le volume de mesure verticalement

par rapport à l'axe du canal jusqu'à la cote  $y$ , puis on prend la mesure de la vitesse à cet endroit. Cette dernière opération est répétée jusqu'à avoir un nombre de points suffisant pour pouvoir tracer par la suite le profil de vitesses. Le déplacement  $y$  est possible à l'aide d'une table de déplacement micrométrique (l'erreur sur  $y$  est de l'ordre de 0.01 mm).

Notons, que dans ce système, la vitesse dépend indirectement de l'indice de réfraction. En effet, pour déterminer la position  $y$ , on a besoin de connaître la valeur de l'indice de réfraction air-fluide. Pour cela, on mesure à l'aide de la jauge une profondeur de fluide  $h$ , puis cette hauteur est comparée au déplacement  $y_h$  nécessaire à la sonde lorsque le volume de mesure coïncide avec le profil de la surface libre. Un calcul géométrique simple permet de déduire la valeur de l'indice de réfraction. On obtient une valeur proche de l'indice de réfraction de l'eau ( $1.333 \pm 2\%$ ), avec une erreur sur  $y_h$  d'environ 0.2 mm.

Le grand intérêt de cette méthode est de permettre des mesures sans contact avec le liquide, contrairement à d'autres méthodes de mesures telles que le tube de Pitot, les moulinets, et l'anémomètre à fil chaud. Signalons qu'on a également tenté d'utiliser la technique de vélocimétrie par images de particules Dantec (VIP), car en plus de ne pas perturber l'écoulement, elle permet également en une seule prise de vue de mesurer un nombre important de points, ce qui permet d'avoir directement la répartition de vitesses le long d'une section transversale. Malheureusement, cela n'a pas été possible car la largeur du canal est trop importante pour prendre, dans la ligne centrale du canal, des images traitables. De plus, à cause de la pollution, le fluide perd sa nature initialement transparente, or le fonctionnement de la VIP nécessite un fluide parfaitement transparent.

### Fonctionnement

Une fois que la solution est prête, on met en marche le moteur de la pompe (2). Le fluide est transporté par le tuyau d'alimentation (5a), il arrive à l'entonnoir variateur de débit (5b). Après avoir traversé l'entonnoir, le jet sera divisé en deux parties par la tranche de la plaque qui sépare le bac d'alimentation et le bac du trop-plein (5c). La partie du jet qui passe par le bac trop-plein retourne à la trémie, l'autre partie passe par le canal (1) et elle est soumise, à l'expérimentation. Le canal verse le fluide dans la contre goulotte (7). Puis, le fluide arrive au système d'aiguillage où il est dirigé vers la trémie ou bien vers le bac de pesée (6c) pour la mesure du débit. L'expérimentation commence après environ 15 mn, lorsque le régime permanent est établi

### Paramètres étudiés

Le fluide étudié est le gel de Carbopol caractérisé par le seuil de contrainte  $s$ , la consistance  $k$  et l'indice de rhéofluidification  $n$ . Étant donné le pH de la solution, on obtient pour chaque concentration massique ' $C_m$ ' en Carbopol, des valeurs  $s$ ,  $k$  et  $n$  données. Les paramètres sur lesquels on a joué sont : le débit volumique  $q_v$  ; la pente du canal  $\theta$  et la concentration massique  $C_m$ . La masse volumique du fluide  $\rho$  et la température  $T$  sont supposés constantes. Pour chaque configuration ( $q_v, \theta, C_m$ ), on a besoin de connaître la hauteur normale de l'écoulement, la courbe de remous et la répartition de vitesses le long des sections transversales. Les paramètres de l'écoulement étudiés sont indiqués dans le Tableau 2

Tableau 2: Configurations de l'écoulement

$C$ [%]	Désignation	$q_v$ [l/s]	$\theta$ [°]
0.12	RUN1	3	4.9
	RUN2	1.5	4.9
	RUN3	3	2.4
0.16	RUN4	3	4.9
	RUN5	3	9.9
	RUN6	1	4.9
0.55	RUN7	1.2	24.9
	RUN8	6.3	24.9
	RUN9	1	7.4
	RUN10	1.3	24.9
	RUN11	0.073	29.9

#### 1.6.4 Écoulement uniforme

##### Estimation des paramètres rhéologiques

Les relations théoriques du régime uniforme indiquent la très grande sensibilité du profil de vitesse aux variations des paramètres rhéologiques. Une variation de 10% de  $s$  entraîne un écart sur la vitesse maximale qui peut atteindre 50% et une variation de 10% de  $n$  donne un écart sur la vitesse maximale qui peut atteindre 35%.  $k$  est le paramètre le moins sensible, l'écart obtenu pour une variation de 10% est environ 9%. D'autre part, on a déjà signalé dans le chapitre I que le fluide testé est affecté par plusieurs paramètres, tels que la variation du pH

due à la pollution du fluide et l'évaporation. De plus, il est connu au laboratoire (cf. également N'Guyen et Boger 1992) que l'incertitude sur les mesures rhéométriques des fluides complexes peut atteindre 30%. Le seuil de contrainte et l'indice  $n$  sont les paramètres les plus affectés par ces mesures. Ainsi, les valeurs des paramètres rhéologiques des fluides testés ont été évaluées de deux manières différentes. D'une part, par ajustement des mesures rhéométriques et de la courbe théorique (loi d'Herschel-Bulkley). D'autre part, par ajustement de quelques résultats expérimentaux obtenus dans le canal sur les lois du régime uniforme. Dans ce dernier cas, en se servant des études paramétriques de Belhadri (1996), on commence par estimer l'indice  $n$ . Compte tenu des mesures établies en régime uniforme, on calcule ensuite par la méthode des trapèzes la vitesse moyenne  $U_{int}$ . Connaissant également la vitesse maximale (Tableau 4), on peut compte tenu de l'équation (82) évaluer le nombre d'Oldroyd, soit:

Tableau 3 : Paramètres rhéométriques obtenus en rhéomètre et par analyse des profils médianes de vitesse en régime uniforme

		$q_v$ [l/s]	$\theta$ [°]	$s$ [Pa]	$k$ [Pa.s <sup>n</sup> ]	$n$
$C=0.12\%$	<i>Rhéométrie</i>			7.5	4.6	0.39
	RUN1	3	4.9	8.52	4.4	0.39
	RUN2	1.5	4.9	8.25	4.4	0.39
	RUN3	3	2.4	8.45	4.4	0.39
$C=0.16\%$	<i>Rhéométrie</i>			22	7.7	0.375
	RUN4	3	4.9	25.2	7	0.375
	RUN5	3	9.9	26	6.95	0.375
	RUN6	1	4.9	24	6.1	0.375
$C=0.55\%$	<i>Rhéométrie</i>			37	20.5	0.365
	RUN7	1.2	24.9	34.7	20.5	0.365
	RUN8	6.3	24.9	33	19.04	0.365
	RUN9	1	7.4	32	18.16	0.365
	RUN10	1.3	24.9	31.8	19.6	0.365
	RUN11	0.073	29.9	29.5	20	0.365

$$Od = 1 - \left( \frac{2n+1}{n} \right) \left[ 1 - \frac{U_{int}}{w_s} \right] \quad (106)$$

On en déduit le seuil de contrainte, puis la consistance du fluide  $k$  à partir de l'équation

suivante :

$$k = \left( \frac{b}{b + 2h} \right) \left( \frac{n}{1 + n} \right)^n (1 - Od)^{1+n} \frac{\rho g \sin(\theta) h_n^{1+n}}{w_s^n} \quad (107)$$

Les paramètres rhéologiques ainsi calculés sont comparés aux mesures rhéométriques (Figures. 14, 15, 16 et Tableau 3). L'écart est d'environ 20%. Ce qui est raisonnable, vu l'incertitude des mesures rhéométriques.

Tableau 4 : Paramètres de l'écoulement en régime uniforme

<i>C</i> [%]	<i>h</i> ( <i>e</i> ) [mm]	<i>w<sub>s</sub></i> [cm/s]	<i>U</i> [cm/s]	<i>U<sub>int</sub></i> [cm/s]	$\hat{x} =$ <i>b/2h</i>	$\lambda_p$	<i>Od</i>	<i>Re</i>	<i>Fr</i>	
0.12	RUN1	42.3	35.5	23.6	30.3	3.5	1.35	0.308	10.12	0.422
	RUN2	37.0	20.9	13.5	17.8	4.1	1.31	0.332	3.95	0.298
	RUN3	76.6	18.1	13.1	15.8	2.0	1.55	0.406	4.6	0.203
0.16	RUN4	82.6	15.3	12.1	13.6	1.8	1.58	0.565	2.59	0.257
	RUN5	42.6	30.3	23.5	26.8	3.5	1.35	0.465	6.40	0.487
	RUN6	66.3	6.9	5.0	6.4	2.3	1.50	0.623	0.674	0.244
0.55	RUN7	30.9	16.8	13.0	14.4	4.8	1.27	0.328	0.751	0.505
	RUN8	40.2	71.4	52.2	59.7	3.7	1.34	0.252	8.55	0.985
	RUN9	78.6	5.9	4.2	5.3	1.9	1.56	0.491	0.176	0.256
	RUN10	29.6	20.5	14.46	16.52	5	1.26	0.307	0.928	0.507
	RUN11	16.73	2.38	1.45	2.01	9	1.15	0.401	0.018	0.559

Écoulement uniforme et écoulement graduellement varié en régime laminaire

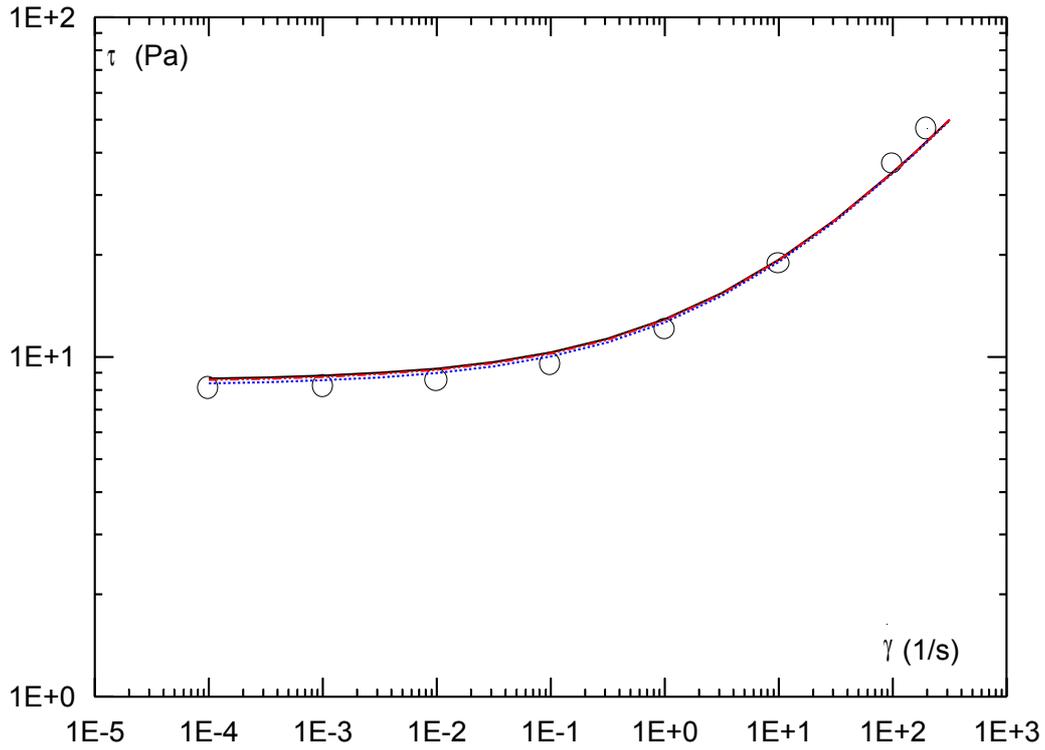


Figure 14: Courbe d'écoulement ; gel de Carbopol ( $C_m=0.12\%$ )

○ Mesures rhéométriques — Analyse RUN1 ····· Analyse RUN2 - - - - Analyse RUN3

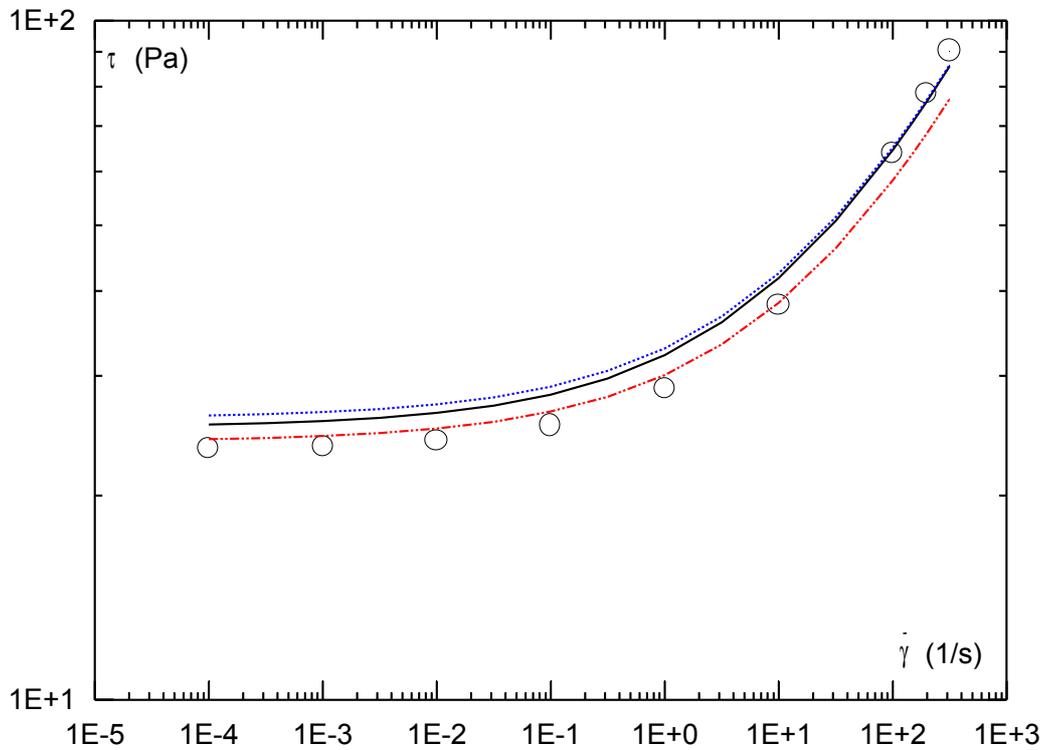


Figure 15: Courbe d'écoulement ; gel de Carbopol ( $C_m=0.16\%$ )

○ Mesures rhéométriques — Analyse RUN4 ····· Analyse RUN5 - - - - Analyse RUN6

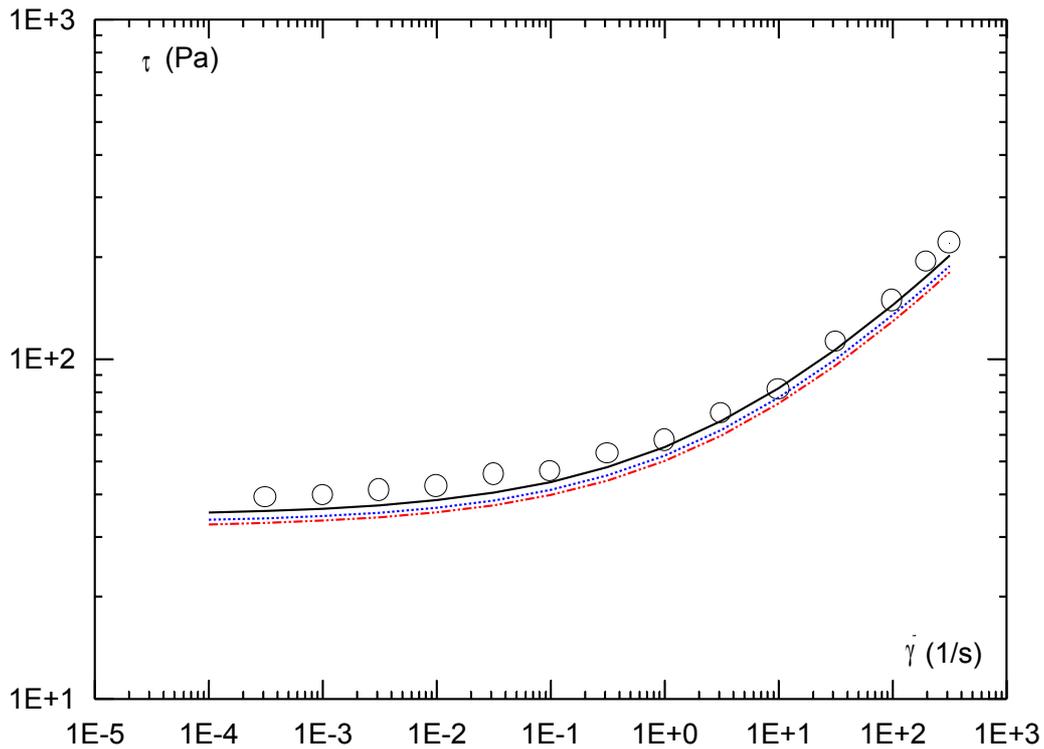


Figure 16: Courbe d'écoulement ; gel de Carbopol ( $C_m=0.55\%$ )

○ Mesures rhéométriques — Analyse RUN7 ..... Analyse RUN8 - - - Analyse RUN9

### Profil de vitesse

L'étude du régime uniforme a été réalisée avec trois concentrations massiques en Carbopol (0.12, 0.16 et 0.55%). Pour chaque concentration, on fait varier le débit et la pente du canal (Tableau 2). Les figures 17, 18 et 19 montrent la répartition de vitesses en fonction du nombre  $Od$ . Les mesures ont été réalisées au milieu du canal (où le régime est proche du régime uniforme) et dans son plan de symétrie axiale. Les courbes sont représentées en variables adimensionnelles. Remarquons l'existence effectivement de deux régions de l'écoulement ; une zone rigide et une zone en déformation. Notons également l'existence dans les coins de zones mortes mais celles-ci sont très petites. L'ensemble de ces courbes montrent l'effet du nombre d'Oldroyd qui amène l'écoulement vers le blocage lorsqu'il approche l'unité. D'autre part, la comparaison de ces profils à la théorie révèle un accord satisfaisant. Comme les valeurs du paramètre  $\hat{x}=b/2h$  sont comprises entre 1.8 et 4.9, les effets du bord ne peuvent pas être négligés et la correction du profil théorique 1D est une opération indispensable.

Écoulement uniforme et écoulement graduellement varié en régime laminaire

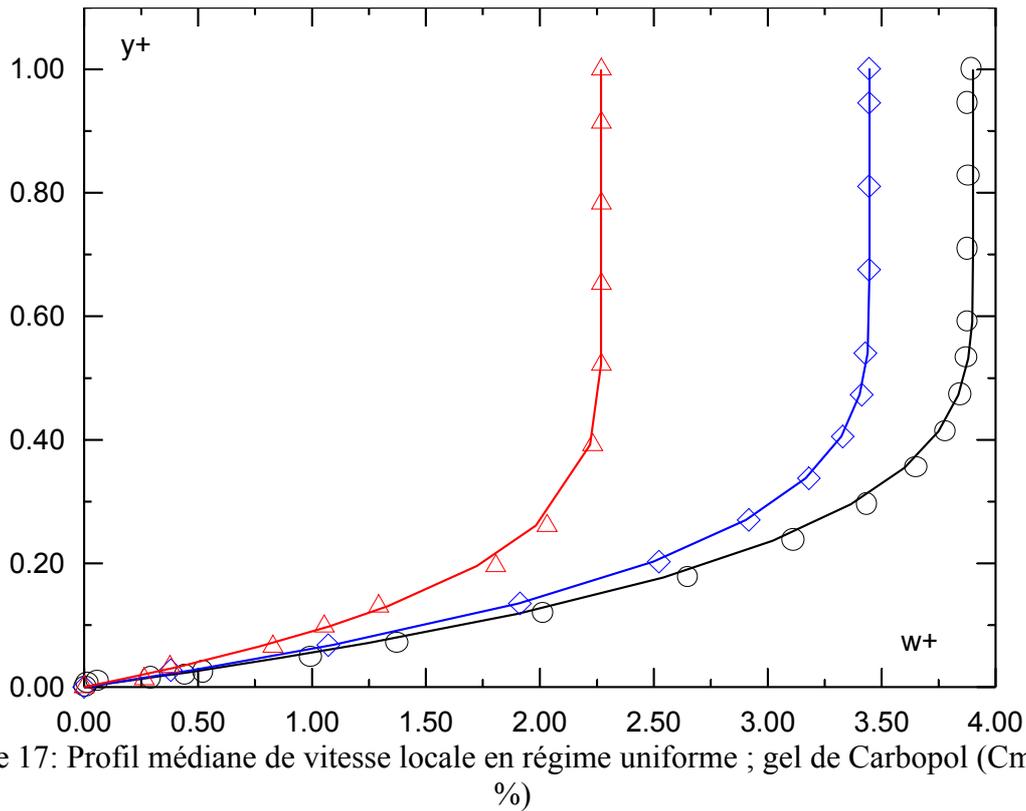


Figure 17: Profil médiane de vitesse locale en régime uniforme ; gel de Carbopol ( $C_m=0.12\%$ )

○ Expérience : RUN1    ◇ Expérience : RUN2    △ Expérience : RUN3    — Théorie

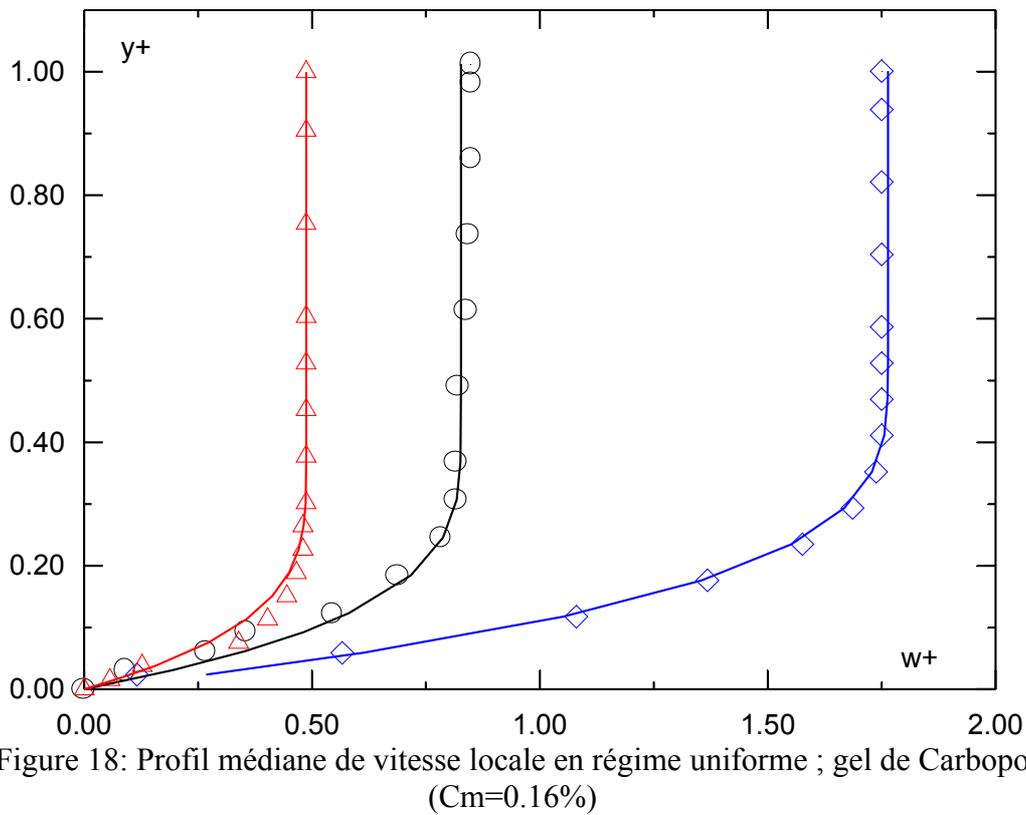


Figure 18: Profil médiane de vitesse locale en régime uniforme ; gel de Carbopol ( $C_m=0.16\%$ )

○ Expérience : Run4    ◇ Expérience : Run5    △ Expérience : Run6    — Théorie

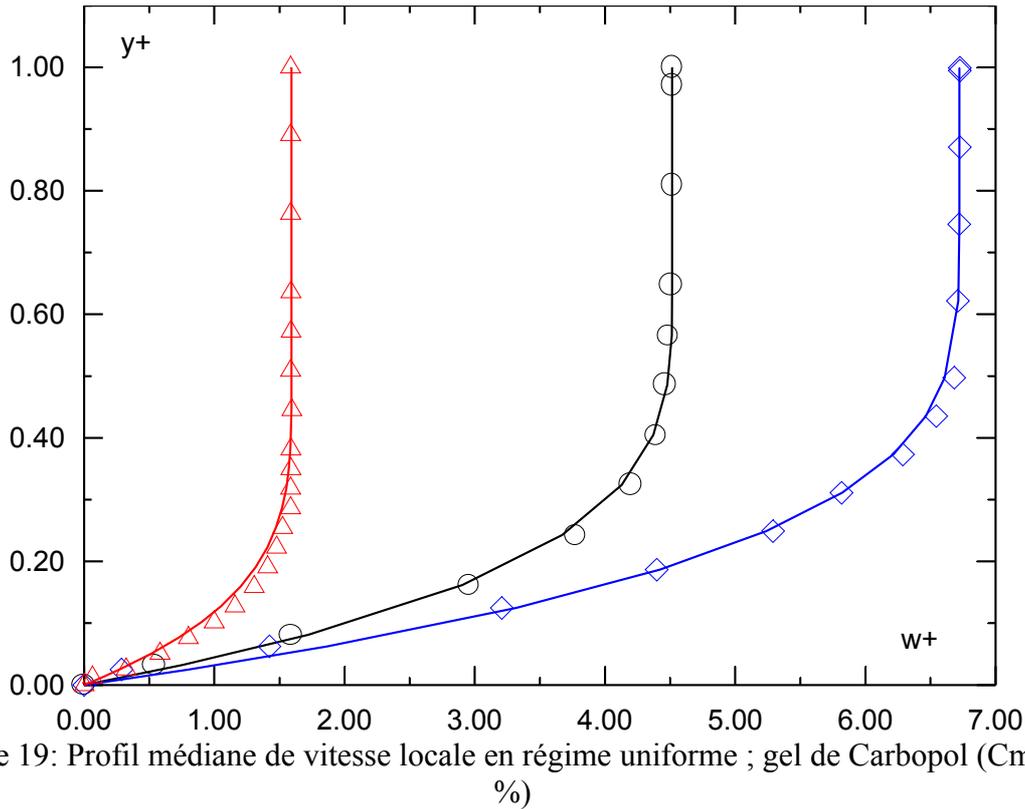


Figure 19: Profil médiane de vitesse locale en régime uniforme ; gel de Carbopol ( $C_m=0.55$  %)

○ Expérience : Run7    ◇ Expérience : Run8    △ Expérience : Run9    — Théorie

### Coefficient de perte de charge

Un problème classique d'ingénierie est d'évaluer le débit en fonction de la perte de charge étant donné les paramètres de l'écoulement et la géométrie de la section. Nous avons donc tenu compte de ce besoin en calculant compte tenu des mesures réalisées, le coefficient de perte de charge ( $\Lambda$ ) et le nombre de Reynolds généralisé ( $Re_{HB}$ ).  $\Lambda$  en fonction de  $Re_{HB}$  est représenté graphiquement (figure 20) et comparé à la théorie indiquée par l'équation (36) (qui reste identique à celle de l'Hydraulique classique avec un nombre de Reynolds généralisé spécifique à la loi d'Herschel-Bulkley). Pour tenir compte des effets de bord, qui ne sont pas négligeables dans ce cas, la méthode de pondération du diamètre hydraulique référencée à une section plane a été utilisée. Les autres méthodes donnent des résultats très proches. Faute de mieux,  $Od_c$  est pris égal à 1. Le débit utilisé dans le calcul correspond au débit volumique mesuré dans le canal et non pas au débit intégré à partir du profil central de vitesses, ce dernier a été employé précédemment pour estimer les paramètres rhéologiques du fluide. Dans ces conditions, on vérifie qu'on réalise un bon accord expérience/théorie. On a également représenté sur la figure 21 la prédiction théorique et les mesures correspondant à la fonction  $g(n, Od, x \rightarrow \infty)$ . L'accord est également satisfaisant.

Écoulement uniforme et écoulement graduellement varié en régime laminaire

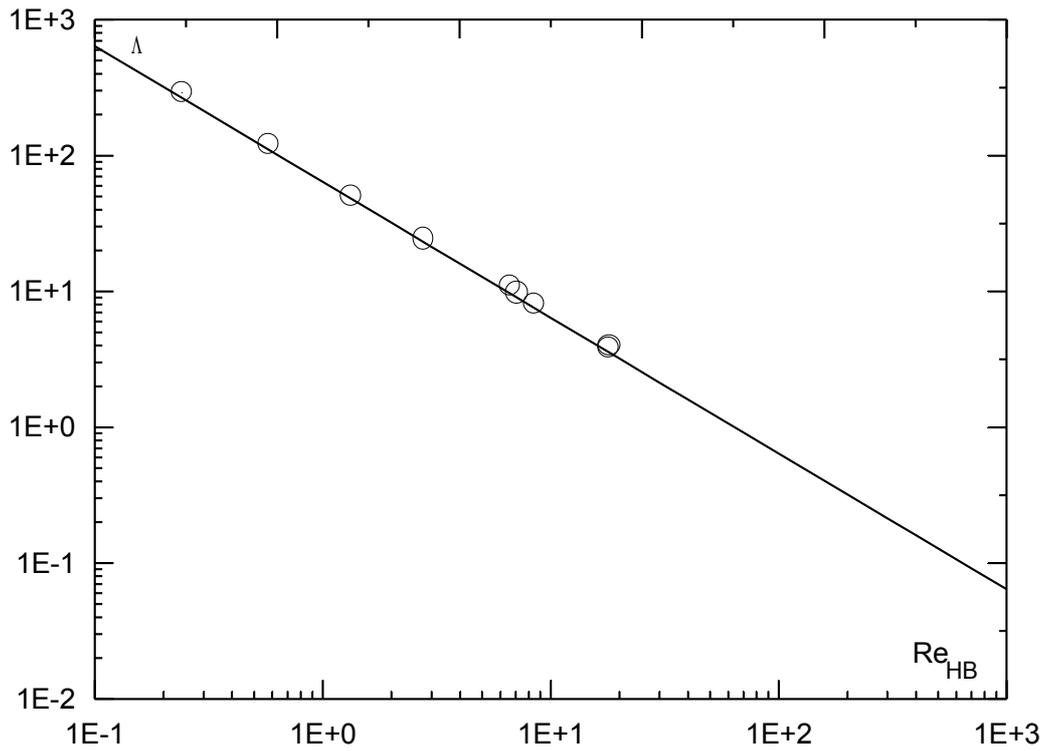


Figure 20: Coefficient de perte de charge en fonction du nombre de Reynolds généralisé en régime uniforme

○ Expérience — Théorie

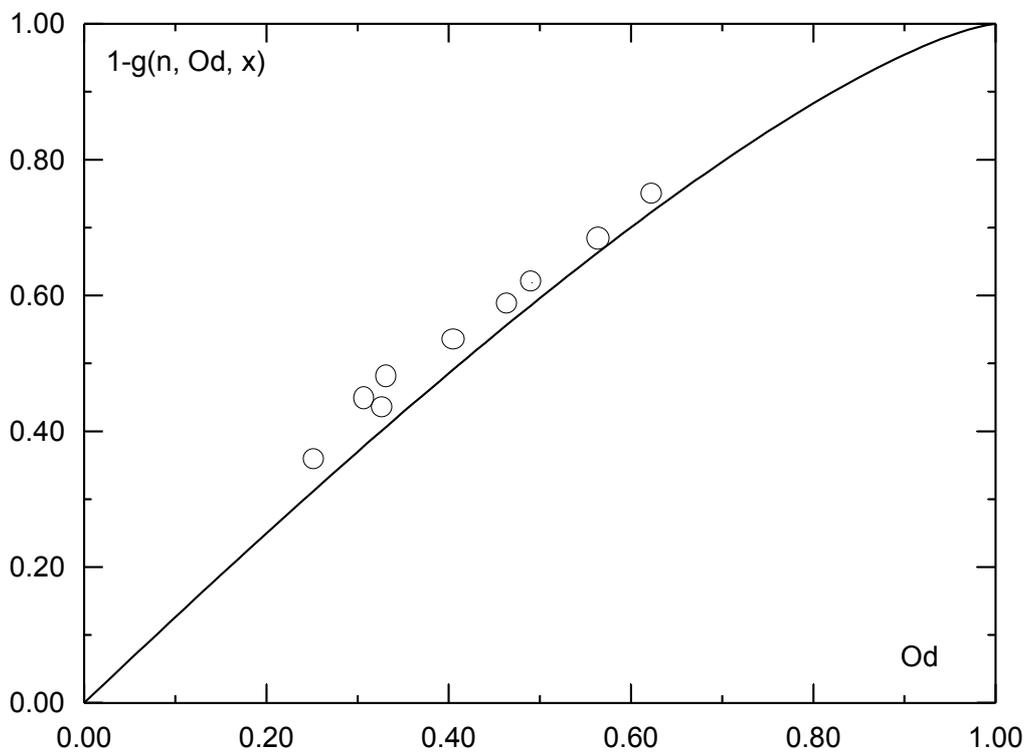


Figure 21: Variation de  $g$  en fonction de  $Od$  ; régime uniforme gel de Carbopol

○ Expérience — Théorie

### I.6.5 Écoulement graduellement varié

Cet écoulement se produit sur une certaine longueur adjacente au bord aval du canal. Ailleurs, l'écoulement est uniforme. Avant de commencer l'analyse, rappelons que les résultats expérimentaux d'Ayadi montrent qu'il est indispensable de redéfinir la hauteur critique et le nombre de Froude de l'hydraulique classique. D'ailleurs, c'est la raison pour laquelle nous avons donné dans ce travail une importance particulière à la proposition de Piau (1996) en rapport avec le modèle d'Herschel-Bulkley.

Pour une meilleure interprétation des résultats, on indique dans le Tableau 5 certaines hauteurs caractéristiques de l'écoulement qui sont indispensables dans ce problème.  $h_b$  désigne la profondeur de l'écoulement à l'endroit du jet. Un point intéressant à signaler est que  $h_c$  ne correspond pas toujours à  $h_b$ . En plus, il n'existe pas a priori une relation directe entre ces deux profondeurs. Il se peut que dans le cas général,  $h_b$  dépend aussi de la nature du jet à l'endroit de la chute (écoulement collé ou aéré).

Tableau 5 : Hauteurs caractéristiques de l'écoulement (en mm)

Désignation	$h$ (e)	$h_b$	$h_{ch}$	$h_c$	$E_{\min}$	$h_l$	$h_p$
RUN1	42..3	18.96	22.6	23.0	44.6	33.0	1.31
RUN2	37.0	11.55	14.2	14.7	27.6	21.2	1.27
RUN3	76.6	19.71	22.5	23	44.6	32.9	1.29
RUN4	82.6	20.7	22.5	23.9	43	35.7	3.87
RUN5	42.6	19.15	22.6	24.1	43.2	36.0	4.04
RUN6	66..3	13.82	10.8	12.2	21.3	19.5	3.68
RUN7	30..9	16.65	12.6	14.9	26.2	25.1	5.85
RUN8	40.2	27	38.1	40.1	73.0	59.3	5.56
RUN9	78.6	19.83	10.8	12.8	22.4	21.4	4.94
RUN10	29.6	15.83	13.3	15.4	26.8	25.2	5.36
RUN11	16.73	10.60	1.98	5.47	13.9	14.6	5.21

D'autre part, les expériences de la littérature avec l'eau, montrent que l'énergie minimale apparaît dans l'écoulement à une distance entre  $3h_c$  et  $4h_c$  en allant vers l'amont de la chute. La différence par rapport au cas des fluides à seuil de contrainte est notable. En effet, dans nos expériences la localisation de l'énergie minimale dépend à la fois de la profondeur critique et de la valeur de l'énergie minimale. Cette dernière est fonction non pas seulement de la profondeur critique, comme en hydraulique classique, mais également de la profondeur

$h_\theta$ . Lorsque le rapport  $h_c/E_{\min}$  dépasse environ 1, le long de tout l'écoulement, même à l'endroit de la chute, l'énergie dépasse  $E_{\min}$ , et donc l'écoulement est partout fluvial. Pour  $h_c/E_{\min} < 1$ , on obtient, comme en hydraulique classique, un écoulement torrentiel au voisinage de la chute, mais l'abscisse de  $h_c$  est située largement au-dessous (ici entre  $0.4h_c$  et  $0.7h_c$ ). Dans ce cas, on propose pour une première évaluation de l'abscisse  $z_c = z(h = h_c)$ , la loi empirique suivante :

$$z_c \approx \left( 1.5 \frac{h_c}{E_{\min}} - 0.7 \right) h_c \quad (108)$$

### Evaluation expérimentale de la pente de frottement : loi semi-théorique

Compte tenu de l'équation (95) la pente de frottement s'exprime :

$$J = \sin(\theta) - \cos(\theta) E_z$$

Il est donc possible si on disposait d'un nombre assez de points  $h_i(x_i)$  et les valeurs des paramètres de l'écoulement, d'évaluer expérimentalement  $J$  et comparer le résultat à la théorie de l'équivalence locale en régime uniforme. Dans ce but, la dérivée de  $E$  intervenant dans cette équation a été approchée en utilisant une discrétisation de deuxième ordre, soit :

$$J_i(h_i) = \sin(\theta) - \cos(\theta) \left\{ \frac{(x_i - x_{i-1})^2 E_{i+1} - (x_{i+1} - x_i)^2 E_{i-1} + [(x_{i+1} - x_i)^2 - (x_i - x_{i-1})^2] E_i}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1})} \right\}$$

On calcul ensuite  $Od_i$  à partir de l'équation (102).  $T_{s_i}$  est calculée séparément, pour chaque valeur de  $h_i$ , en utilisant l'équation (104). Il est aussi possible de calculer indépendamment les nombres  $R_{HB}$  et  $\Lambda$  à partir de la définition de chaque de ces nombres (voir les relations du régime uniforme).

Le coefficient de perte de charge en fonction de  $R_{HB}$  est représenté graphiquement sur la figure 22. On peut voir un domaine dans lequel l'approximation de l'écoulement équivalent uniforme est assez bien vérifiée. En contrepartie, on note l'existence d'un domaine où cette approximation ne reste pas vraie. En effet, on obtient à partir d'une certaine valeur de  $\Lambda$  un nouveau régime, de telle sorte qu'une valeur donnée de  $R_{HB}$  peut correspondre à deux valeurs différentes de  $\Lambda$ , l'une se trouve, approximativement, dans la droite théorique et l'autre dans un régime inconnu jusqu'à maintenant.

Est-il possible de modéliser maintenant ce comportement si complexe? Compte tenu de la difficulté actuelle du sujet et l'intérêt de passer à l'étude d'autres problèmes, je vais pas

m'engager dans cette piste. En revanche, je tiens à dégager quelques lignes directrices qui permettront plus tard d'arriver à cette solution idéale.

D'abord, en traçant sur la figure 23 l'ensemble des mesures de  $Od$  et  $T_s$ , et en comparant ensuite le résultat à la courbe théorique (équation (101)), on peut remarquer également que la correspondance est assez bonne dans un domaine mais pas sur l'ensemble. Il convient cependant de signaler que cet accord avec la théorie n'est vrai que lorsqu'on tient compte des contraintes élongationnelles dans le calcul de  $E$ , sinon on obtient des points situés au-dessous de la courbe théorique, qui signifie, comme déjà prédit par Piau, que les contraintes dans cette région sont supérieures à celles d'un cisaillement simple. La valeur optimale de  $\phi$ , qui donne le meilleur accord, se trouve entre 1.5 et 2. Compte tenu de ce résultat et d'autres considérations que nous les signalerons dans la suite, nous avons opté pour  $\phi = 1.5$ , valeur assez proche de la valeur de Van Mises en élongation simple (voir plus haut).

Revenons maintenant à la figure 23. Le nombre  $Od$  diminue donc avec l'augmentation de  $T_s$  jusqu'à une certaine valeur, après  $Od$  augmente. Sachant que dans notre cas  $T_{s_i}$  augmente en allant de l'amont vers la chute brusque et que  $Od$  est inversement proportionnel à la contrainte moyenne à la paroi, il résulte que la contrainte moyenne à la paroi augmente en allant vers la chute jusqu'à une certaine valeur maximale, puis elle diminue.

Il nous faut alors répondre à la question que l'on en droit de se poser, pour quoi la contrainte moyenne à la paroi diminue en fonction de l'abscisse, sachant que celle-ci est en fonction du gradient de vitesse à la paroi ( $\tau_w = s + k(w_{,y})^n_{y=0}$  en cisaillement simple), et que ce dernier augmente en fonction de  $z$  (vérifié expérimentalement)? Le glissement peut être la cause, mais il apparaît dans nos expériences que ce phénomène est absent ou il est négligeable. Il est également envisageable que la cause soit les effets de l'écoulement 2D, puisque eux aussi participent au ralentissement du fluide et qui ont été négligés dans le modèle. Mais comme la contrainte diminue même au voisinage de l'écoulement uniforme, cette hypothèse n'est pas dans l'ensemble satisfaisante. Effectivement, l'écoulement 2D a un effet mais seulement au voisinage immédiat de la chute qui se caractérise par un changement du régime d'écoulement (du fluvial au torrentiel) sans que la forme de la surface libre ne change. On peut aussi envisager la piste d'une éventuelle fracturation du fluide, mais on pense que la réponse la plus convenable, peut être déduite compte tenu de l'équation donnée par Piau (équation 87). On vérifie qu'un terme supplémentaire, en fonction de  $(w_{,z}/w_{,y})^2$ , diminue la contrainte de

cisaillement, il serait donc possible que la relation classique ( $\tau_w = s + k(w_{,y})^n_{y=0}$ ) ne convient pas au cas considéré. Notons que le terme  $(w_{,z}/w_{,y})^2$  est aussi le responsable des contraintes élongationnelles.

Ainsi, dans l'écoulement graduellement varié, le nombre d'Oldroyd ne dépend pas uniquement, comme dans l'écoulement uniforme, de  $T_s$ . Il reste à savoir quelle est ou quelles sont, les autres paramètres qui peuvent influencer. Puisqu'il s'agit d'un écoulement laminaire à surface libre, notre première piste était de voir l'influence du nombre de Froude. Nous avons alors représenté sur la figure 24  $Od$  en fonction de  $Fr$ . Il apparaît un résultat assez intéressant qui va nous faciliter la suite de l'analyse. On obtient une diminution de  $Od$  avec l'augmentation de  $Fr$  jusqu'à une certaine valeur, puis  $Od$  augmente nettement. Ceci est compréhensible vu le résultat obtenu précédemment. Le point saisissant est l'existence d'une valeur caractéristique du nombre de Froude, d'environ 0.6, dans laquelle le nombre d'Oldroyd atteint sa valeur maximale, approximativement. D'autre part, on peut observer, dès fois, une transition avant cette valeur critique du nombre de Froude, la transition semble dépendre surtout du rapport de la profondeur normale à la profondeur  $h = h_l$  qui correspond à  $Fr \approx 0.6$ . Lorsque la valeur de  $h_l$  est assez proche de la profondeur normale, à cause de la transition, l'approximation classique (équivalent uniforme) n'est pas vraie dans l'ensemble de l'écoulement, sauf évidemment dans le régime uniforme

Cette dépendance de  $Od$  vis-à-vis du nombre de Froude, montre que la solution la plus probable du problème est de la forme :

$$Od = Od(Fr, n, T_s)$$

et on peut s'attendre aussi à l'influence du rapport  $(h_n / h_l)$ .

Pour donner une solution approchée, le plus simple est de constater, sur la figure 24, qu'il existe une forme presque symétrique de part et d'autre de  $Fr \approx 0.6$ . Il convient alors, dans notre cas, de supposer que la théorie de l'écoulement quasi uniforme est valable jusqu'à  $Fr \approx 0.6$  et qui reste également valable lorsque  $Fr > 0.6$  mais en remplaçant  $T_s$  par son image dont l'axe de symétrie est  $T_{sI} = T_s(h = h_l)$ . Comme la symétrie n'est pas bien respectée, on propose:

$$Od \approx \begin{cases} G(n, T_s) & si \quad Fr < 0.6 \\ G(n, T_{sI} - 1.6(T_s - T_{sI})) & si: \quad Fr > 0.6 \end{cases} \quad (109)$$

où  $G(n, T_s)$  est la solution de l'équation implicite (101).

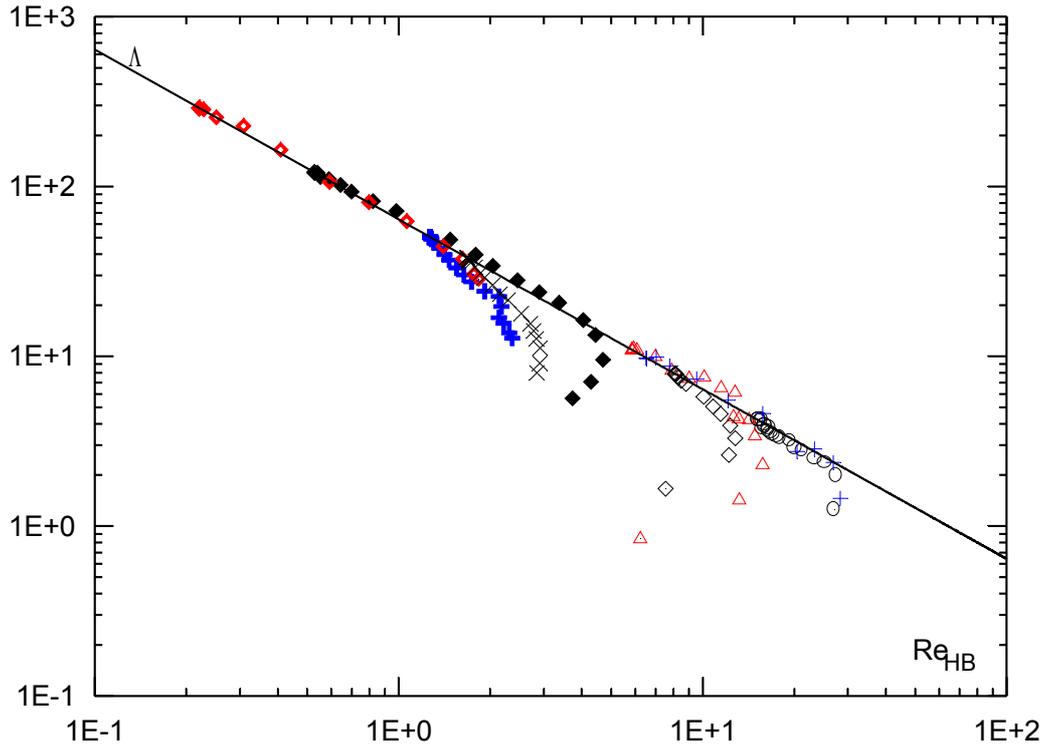


Figure 22 Variation du coefficient de perte de charge en fonction du nombre de Reynolds dans l'écoulement graduellement varié ; gel de Carbopol

○ Run 1    △ Run 2    + Run 3    ◇ Run 5    ◆ Run 6  
 + Run 7    ◆ Run 8    × Run 4    ——— Théorie équivalent uniforme

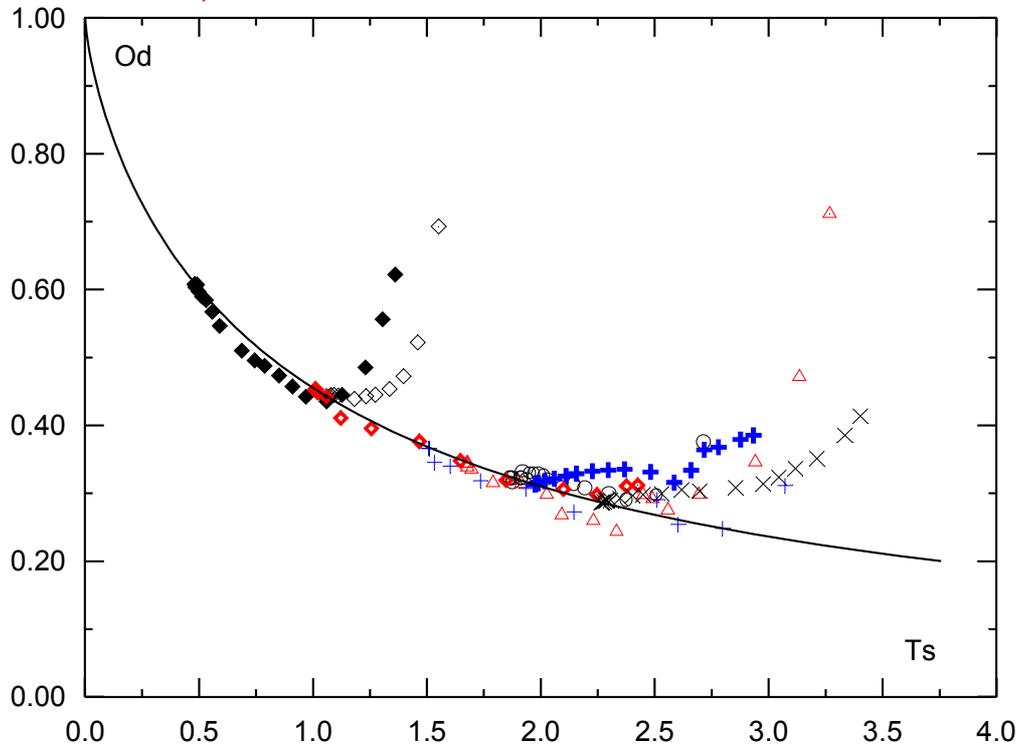


Figure 23 : Variation du nombre d'Oldroyd en fonction du nombre  $T_s$  dans l'écoulement graduellement varié

○ Run 1    △ Run 2    + Run 3    ◇ Run 5    ◆ Run 6  
 + Run 7    ◆ Run 8    × Run 4    ——— Théorie équivalent uniforme

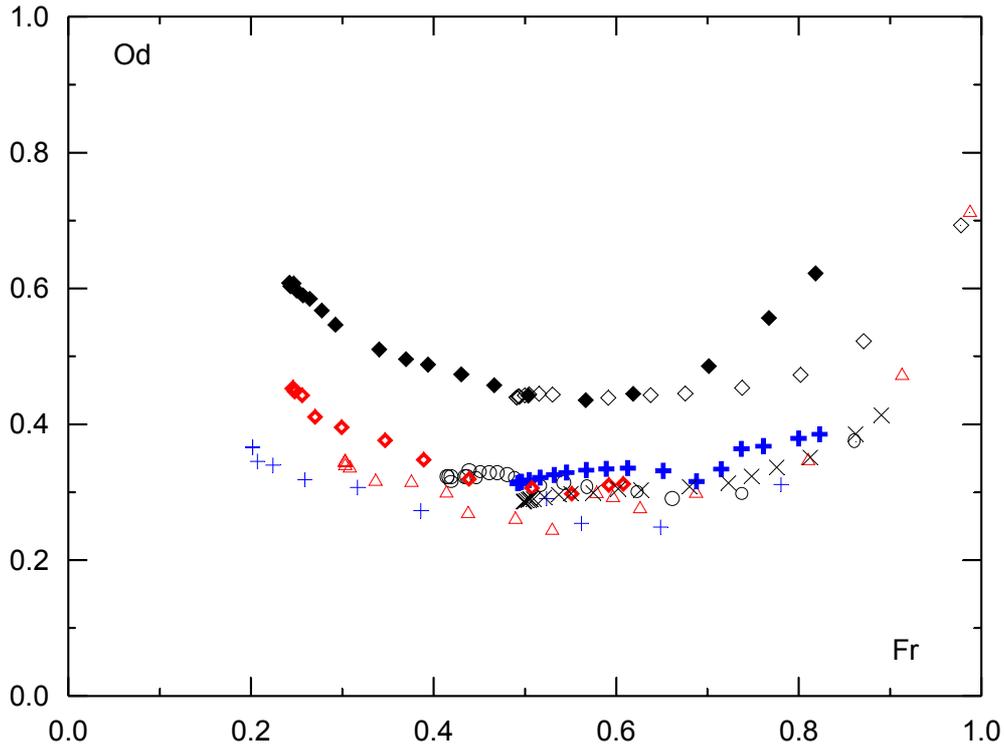


Figure 24 : Variation du nombre d'Oldroyd en fonction du nombre de Froude dans l'écoulement graduellement varié, gel de carbopol



Il faut cependant signaler que l'extrapolation de cette relation à d'autres situations d'écoulement peut probablement entraîner des erreurs. Cela concerne en particulier la zone de l'écoulement où  $Fr > 0.6$ , car le raisonnement utilisé dans ce cas est basé sur un nombre assez limité des résultats expérimentaux, et non pas sur des preuves directes. D'ailleurs, même dans notre cas, cette approximation trouve quelques limites d'application : dans tous les cas lorsque  $Fr > 0.770$  et aussi pour  $Fr < 0.6$  lorsque  $h_r$  est proche de  $h_n$ . Ce dernier cas correspond à la transition. Enfin, rappelons que dans tous les cas il faut tenir compte dans l'équation globale du mouvement du terme proposé par Piau dû aux contraintes élongationnelles.

### Courbes de remous

La résolution numérique de l'équation différentielle (équation (91)) a permis de comparer les mesures des profils de la surface libre. Le procédé de calcul est indiqué plus haut. La pente de frottement  $J$  est évaluée sur la base d'observations semi-théoriques (équation (109)). D'autre part, par simplification, on a négligé dans le calcul la variation du coefficient de forme  $\beta$  avec le nombre d'Oldroyd. Pour être en accord avec le domaine de validité de la loi de frottement proposé (équation (109)), le point de contrôle  $h_0$  est choisi pour que le nombre

de Froude correspond à ce point soit inférieur à 0.775.

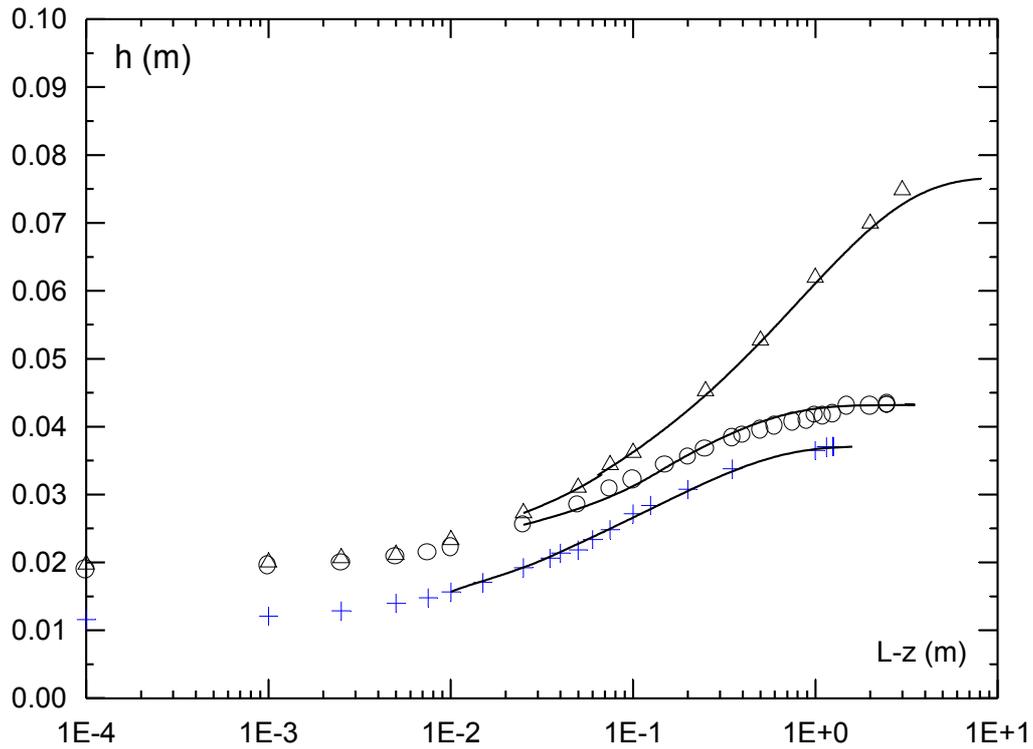


Figure 25: Profil de la surface libre ; gel de Carbopol ; Ecoulement graduellement varié

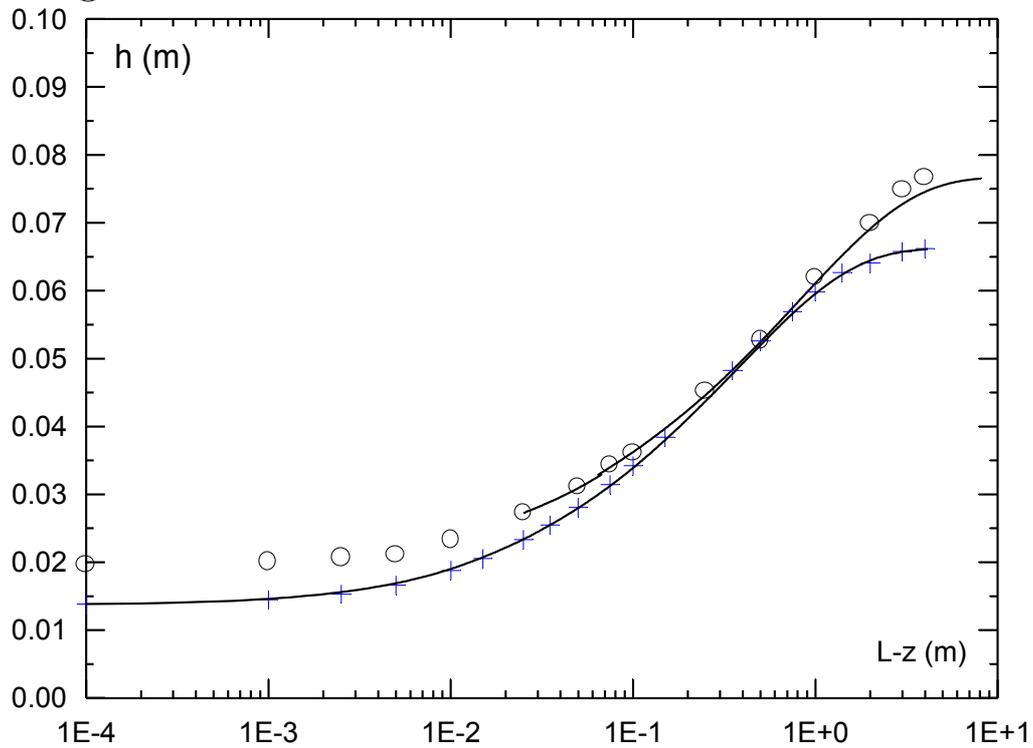


Figure 26: Profil de la surface libre ; gel de Carbopol ; Ecoulement graduellement varié

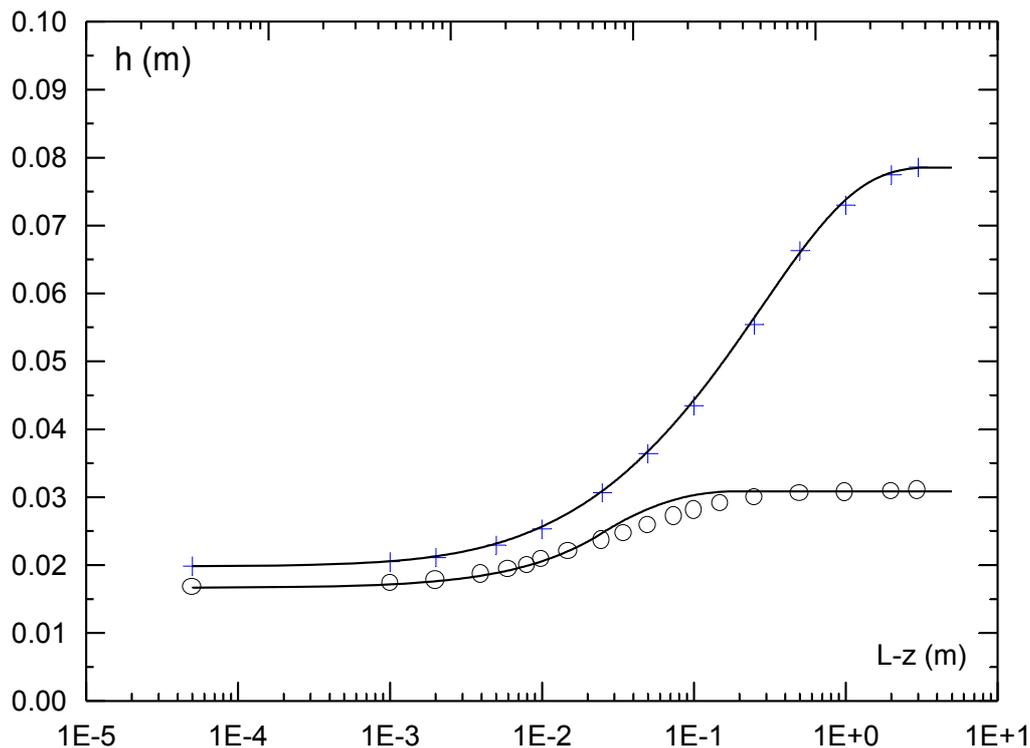


Figure 27: Profil de la surface libre ; gel de Carbopol ; Écoulement graduellement varié

○ Run7    + Run9    ——— Théorie

On représente alors sur les figures 25, 26 et 27 le résultat de ce calcul et aussi les mesures correspondantes. Dans ces conditions, on vérifie qu'on réalise un bon accord expérience/théorie et l'intérêt de prendre  $\varphi = 1.5$ . Il faut cependant signaler que le profil de la surface libre n'est pas très sensible à la variation de  $\varphi$  dans le domaine allant de 1.5 à 2. Il convient donc d'être vigilant lors de l'extrapolation de cette valeur de  $\varphi$  à d'autres situations d'écoulement.

L'écart qui peut être observé en amont (au voisinage de l'écoulement uniforme) a pour cause la mauvaise prise en charge, dans l'évaluation de la pente de frottement, de la transition qui sépare les deux régimes d'écoulement. On vérifie (en consultant le Tableau 5) que l'écart est d'autant plus important lorsque la valeur de la profondeur  $h_l$  est proche à la profondeur normale.

### Répartition de vitesse dans l'écoulement graduellement varié :

La figure 28 montre la répartition de la vitesse à différentes abscisses choisies le long de l'écoulement graduellement varié. On vérifie que le gradient de vitesse à la paroi et la vitesse à la surface libre augmentent en allant vers la chute. L'augmentation de la vitesse à la surface libre en fonction de l'abscisse fait donc savoir qu'il n'existe pas de zones rigides dans l'écoulement graduellement varié, et l'augmentation du gradient de vitesse montre, compte tenu des résultats obtenus précédemment, que la contrainte à la paroi n'est pas représentée

simplement par un écoulement de type cisaillement simple.

Remarquons également que les stations situées en amont sont peu déformées au voisinage de la surface libre. Cela signifie que dans cette région le gradient de vitesse transversal est petit, mais reste toujours comparable au gradient de vitesse longitudinal pour que le fluide coule. Au voisinage de la chute brusque, le problème est beaucoup plus compliqué. Le gradient de vitesse transversal devient ici très important le long de chaque section de l'écoulement. Par conséquent, le fluide devrait subir une forte élongation dans cette région. On peut se rendre compte plus de la difficulté du problème lorsqu'on s'intéresse aux figures 29, 30 et 31 qui représentent la comparaison du profil de vitesse (mesuré à  $L - z = 10 \text{ mm}$ ) à la théorie de l'écoulement équivalent uniforme. Le désaccord est très profond pour qu'on puisse imaginer qu'une approximation de type cisaillement simple suffit d'évaluer l'écoulement dans cette région.

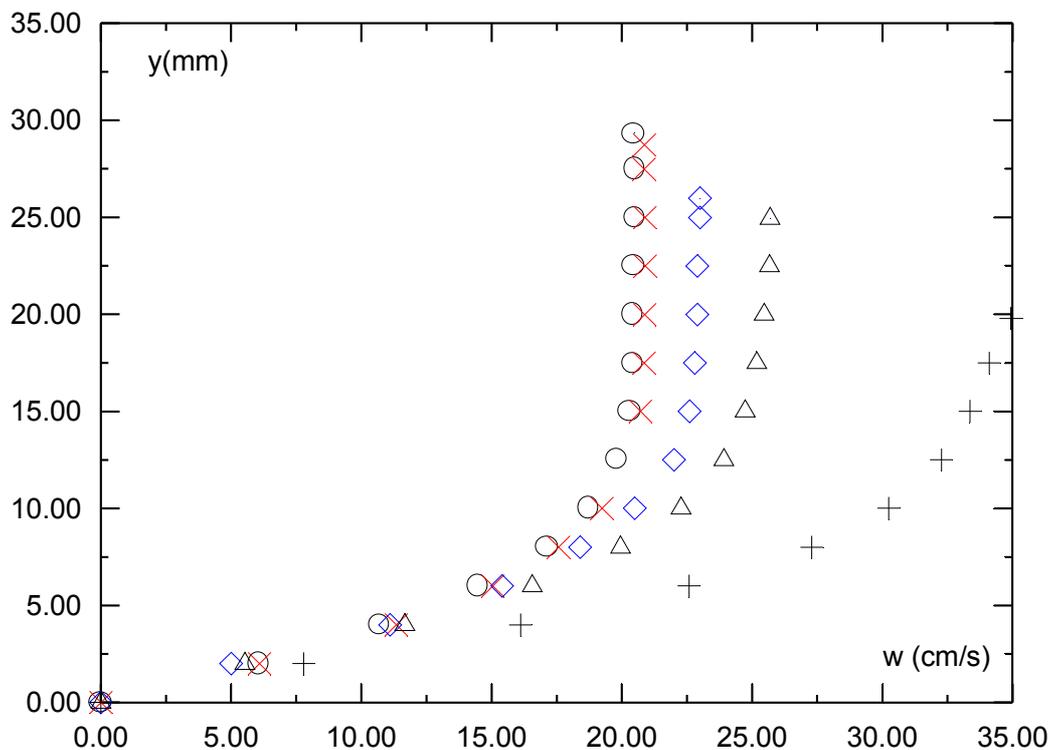


Figure 28: Profil médiane de vitesse locale ; écoulement graduellement varié ; gel de Carbopol ; RUN 10

- L-z=700 mm : SFL=29.33 mm    △ L-z=50 mm : SFL=24.94 mm    + L-z=10 mm : SFL=19.8 mm
- × L-z=300 mm : SFL=28.74 mm    ◇ L-z=100 mm : SFL=26.88 mm

Ces résultats permettent en particulier d'expliquer pourquoi près de l'écoulement uniforme, le coefficient de perte de charge est assez bien représenté par la théorie de l'écoulement uniforme dans la mesure où le terme dû au contrainte élongationnelles proposé par Piau est tenu en compte dans l'équation globale du mouvement. Ils permettent aussi d'expliquer le désaccord profond obtenu avec cette théorie au voisinage de la chute brusque.

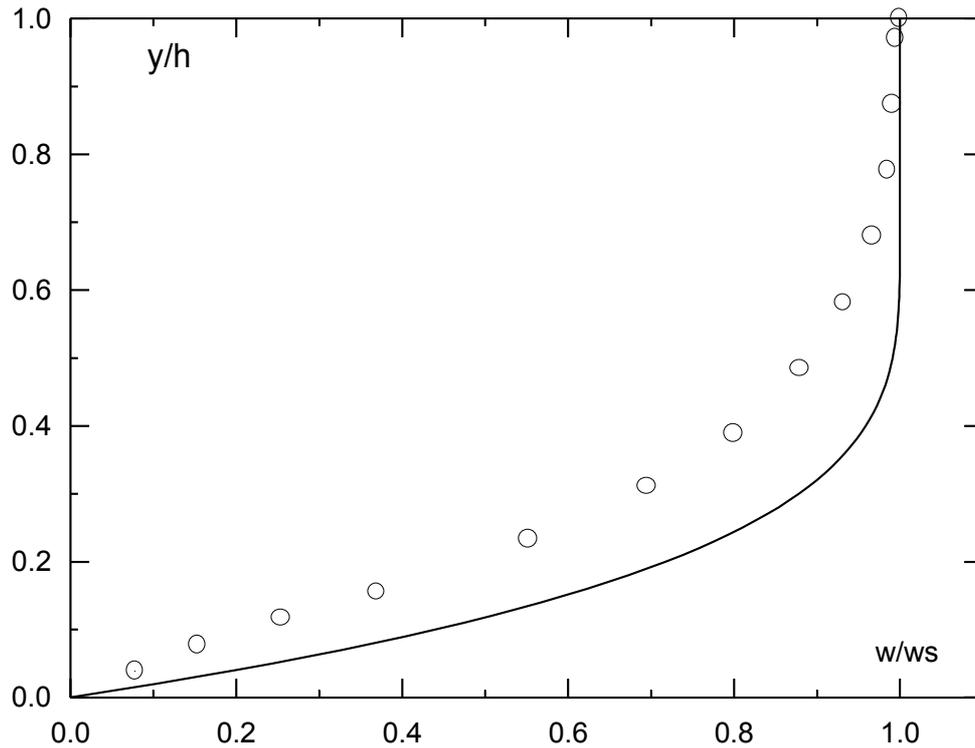


Figure 29: Profil médiane de vitesse locale en régime graduellement varié ; comparaison avec l'approximation de l'écoulement équivalent uniforme (écart non négligeable); Run 9 ,  $L-z = 10\text{mm}$ ,  $h=25.75\text{ mm}$  ,  $w_s = 21.15\text{ cm/s}$

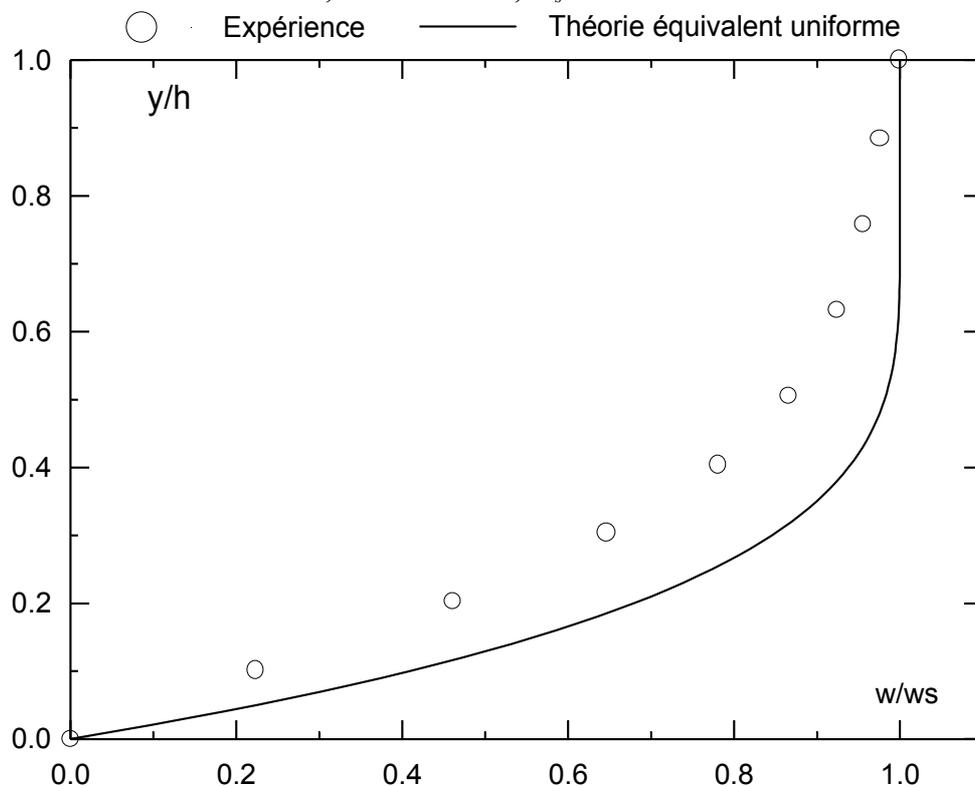


Figure 30 :Profil médiane de vitesse locale en régime graduellement varié ; comparaison avec l'approximation de l'écoulement équivalent uniforme (écart non négligeable) Run 10 ,  $L-z = 10\text{ mm}$  ,  $h=19.8\text{ mm}$  ,  $w_s = 34.9\text{ cm/s}$

○ Expérience ——— Théorie équivalent uniforme

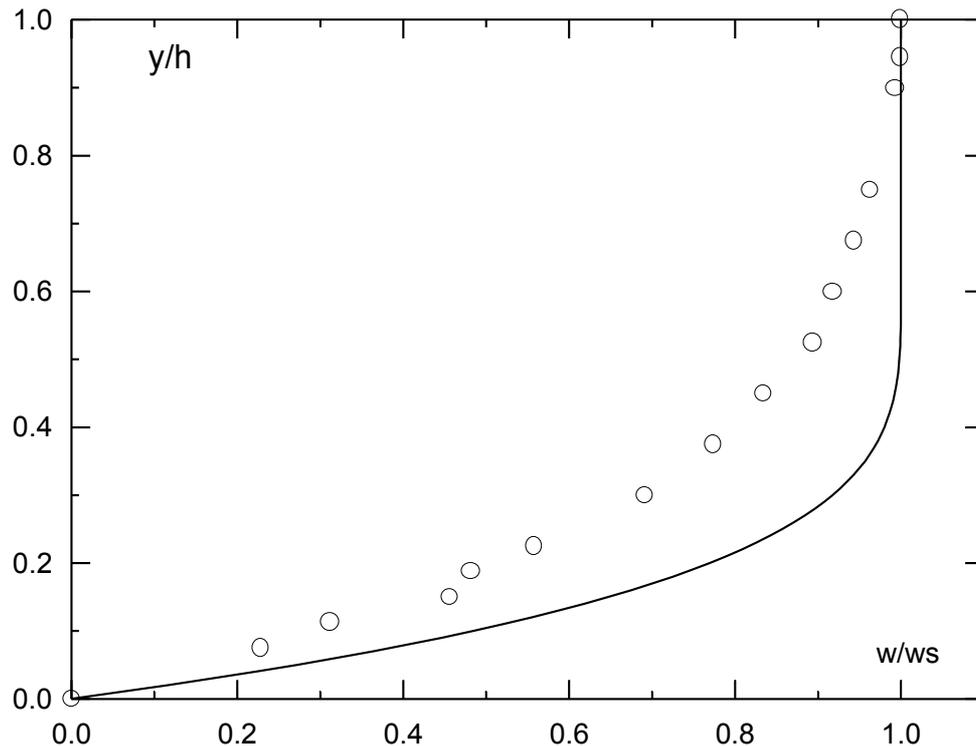


Figure 31 Profil médiane de vitesse locale en régime graduellement varié ; comparaison avec l'approximation de l'écoulement équivalent uniforme (écart non négligeable) Run 11,  $L-z = 10 \text{ mm}$   $h=13.35 \text{ mm}$ ,  $w_s = 3.32 \text{ cm/s}$

○ Expérience ——— Théorie équivalent uniforme

## 1.7 Conclusion

En écoulement uniforme et laminaire, les effets des bords doivent être discutés suivant la valeur du nombre  $\hat{x}$  qui représente le rapport de la largeur du canal sur la hauteur de l'écoulement. Pour  $\hat{x}$  grand, ces effets sont négligeables et l'écoulement peut être étudié avec l'hypothèse d'un canal infiniment large dont la solution analytique exacte. Cependant, pour  $\hat{x}$  petit, les effets des bords ne peuvent pas être négligés et ils participent à augmenter la résistance hydraulique. Nous nous sommes spécialement intéressés dans ce chapitre à ce dernier cas. La solution du problème n'est pas analytique, nous avons donc réalisé une analyse de similitude qui a permis de distinguer les effets visqueux des effets plastiques et de représenter ainsi d'une manière rationnelle les résultats de la littérature. Pour tenir compte des effets des bords, nous avons fait appel d'une part à cette analyse de similitude, d'autre part à quelques méthodes approximatives proposées dans la littérature, et enfin à l'expérience. La validation de ces approches est effectuée à partir de quelques résultats numériques de la littérature et puis par comparaison à nos mesures dans le canal. De plus, notre analyse prouve la très grande sensibilité de l'écoulement aux variations des paramètres rhéologiques, notamment le seuil de contrainte et l'indice de rhéofluidification. Ainsi, la bonne évaluation

de l'écoulement à l'échelle réelle nécessite impérativement de connaître avec une bonne précision les valeurs des paramètres rhéologiques du fluide naturel et l'étendue de la géométrie de l'écoulement.

En se basant sur le modèle de Piau et les résultats expérimentaux obtenus dans le canal, on a essayé à la fin de ce chapitre d'évaluer le coefficient de perte de charge dans le régime graduellement varié. On a pu identifier le rôle du nombre de Froude. On a montré alors l'existence d'une valeur critique de ce nombre (d'environ 0.6) au-dessous de laquelle le coefficient de perte de charge peut être approximativement représenté par la théorie de l'écoulement uniforme dans la mesure où le terme dû à la contrainte élongationnelle proposé par Piau est tenu compte dans l'équation globale du mouvement. Mais lorsque  $Fr > 0.6$  (correspond à la zone située au voisinage de la chute brusque) les mécanismes de l'écoulement sont beaucoup plus complexes. Le fluide est soumis à la fois à une forte élongation et aussi à un cisaillement. Faut de mieux, on a utilisé dans ce cas une loi de frottement déduite sur la base d'observations semi-théoriques, qui donne des résultats satisfaisants lorsque  $Fr < 0.775$ . Le coefficient de forme  $\phi$  qui intervient dans le modèle de Piau a été également évalué d'après l'expérience à 1,5. L'ensemble de ces résultats confirment alors le rôle primordial des contraintes élongationnelles et le nombre de Froude.

## Bibliographie

Astarita, G., Marrucci, G., et Palumbo, G., (1964) Non-Newtonian gravity flow along inclined plane surfaces. *Ind. Engng. Chem. Fundls*, 3; 333-339

Ayadi A., (1996) Écoulement à surface libre des boues argileuses. Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble I

Bartolini P., (1977) Experimental behaviour of the free surface in a uniform laminar stream, *Meccanica* 208-213

Belhadri, M. (1996) Écoulement de fluides à seuil au travers de singularités convergentes et divergentes, Ph.D, thesis, INPG.

Bazin, H., Darcy, H., (1863) Recherche hydrauliques – Dunod, Paris.

Berker, R., (1963) *Handbuch der Physik*, Vol VII, no.2, pp. 1-384

Beverly C.R., Tanner, R.I., (1992) Numerical analysis of three-dimensional Bingham plastic flow. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 42, 85-115.

Bird R.B., Steward W.E., Lightfoot E.W., (1960), *Transport phenomena*. John Wiley and sons, New York.

Boussinesq M.J., (1868) «Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides.», *J, Math. pures et appl*, Série II, XIII ; 377-424.

- Brech, D., (1997) Sur les fluides incompressible : Ecoulement en eau peu profonde, estimation des fluides non Newtoniens. Thesis- Clermont Ferrand.
- Burgess, G., & Mahajerin, E (1987) The fundamental collocation method applied to the nonlinear Poisson equation in two dimensions, *Computers & Structures* 27(6), 763-767.
- Carlier, M., (1980) *Hydraulique générale et appliquée*, Eyrolles
- Carlier, M., (1986) *Hydraulique générale et appliquée*, Eyrolles
- Chow, V.T., (1959) *Open-channel Hydraulics*. McGraw-Hill Book Co., New York
- Coussot, P. (1994) Steady, Laminar, flow of concentrated mud suspension in open channel. *Journal of Hydraulic Research*, 32, N°4 ; 535-559
- De Kee, D., Chhabra, R.P., Powley, M.B., Roy, S., (1990) Flow of viscoplastic fluids on an inclined plane: Evaluation of yield stress. *Chemical Engineering Communications*. 96, 229-239.
- De Saint-Venant B. (1871) Théorie du mouvement non permanent des eaux. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. 73:237
- Dodge and Metzner, (1959) *AIChE J.*, 5, 189
- Edward et Smith (1980) *J. Non Newtonian Fluids Mech.*, 7, 153
- Escudier, M.P., Presti, F (1995) Pipe flow of a thixotropic liquid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 62(1996), 291-306.
- Hedström B.O.A., (1952) Flow of plastic Materials in pipes, *Ind. Eng. Chem.*, 44, 651
- Howard, C.D.D., (1963) Flow of clay-water suspension. *Journal of the Hydraulic Division*. HY5, 89-97
- Huilgol, R.R., Panizza, M.P., (1995) On the determination of the plug flow region in Bingham fluids through the application of variational inequalities. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 58, 207-217.
- Johnson, A.M., (1970) *Physical Processes in Geology.*, Freeman Cooper and Co.
- Jones O.S. Jr. (1976) An improvement in the calculation of turbulent friction in rectangular Ducts, *J. Fluids Eng.*, 1976, pp. 173-181.
- Julien, P.Y., Hartley, D. M., (1986) Formation of roll waves in laminar sheet flow. *Journal of the Hydraulic Research*. 24(1), 5-17.
- Kessel T.V & Kranenburg C. (1996) Gravity current of fluid mud on sloping Bed. *J. Hydr Engrg.*, 122(12), 710-717
- Kozicki, W., & Tiu, C., (1967) Non-Newtonian flow through open channels. *Can. J. Chem. Engng.*, 45 ; 127-133
- Kozicki W., and Tiu C., (1986) Parametric Modeling of flow Geometries in Non-Newtonian Flows. *Encyclopedia of Fluid Mechanics.*», vol 7, Chapter 8 ; 199-252
- Lieu, K.F, & Mei, C. C. (1990) Approximate equations for the slow spreading of thin sheet of Bingham plastic fluid *Phys. Fluids*, A2(1), 30-36.

- Lobek, V., Pokryvaylov, N.A., Prokopchuk, D.A., Topchiy, V.N., (1979), Velocity profiles in a rectangular duct with laminar non-Newtonian flow, *Fluid Mechanics*, 8(4), 92-103.
- Martinet G. (1992) Contribution à la modélisation numérique des avalanches de neige dense et des laves torrentielles. Ph.D. Thèse Université Joseph Fourier- Grenoble I
- Matsuhisa, S., & Bird, R.B., (1965) Analytical and numerical solutions for laminar flow of the Non-Newtonian Ellis fluid. *AIChE J.*, 11, 588-595
- Mayer, P.G., (1961) Roll waves and slug flows in inclined open channels, *Transactions of the ASCE*, pp. 505-535.
- Metzner et Reed (1955) *AIChE J.*, 1, 434
- Midoux, N., (1993) Mécanique et Rhéologie des fluides en génie chimique, Tec & Doc Lavoisier.
- Miller C., (1972) *Ind. Eng. Chem. Fund*, 11, 4
- Paslay, P.R., Slibar, A., (1958) Flow of an incompressible viscoplastic layer on an inclined plane. *Transaction of the society of Rheology*, II, 255-262
- Piau J.M. (1996) Flow of a yield stress fluid in a long domain. Application to flow on an inclined plane. *Journal of Rheology*. 40(4):711
- Piau J.M. (1979) Fluides Non-Newtonien. *Techniques de l'ingénieur*, A710, 16p., A711, 24p
- Qian, N., & Wan, Z. (1986) A critical review of the research on the hyperconcentrated flow in china. *Intl Res. And Training Ctr. On Erosion and Sedimentation*, Beijing.
- Skelland, A. H. P, (1967) *Non-Newtonien flow and Heat transfer*, John Wiley & Sons, New York, N.Y.
- Saramito, P., J.M Piau (2000) article soumis
- Sestak, J., (1974) Flow of Non-Newtonian fluids in open circular channels. *Can. J. Chem. Engng.*, 52 ; 670-672
- Taylor, A.J., Wilson, D.R., (1997) Conduit flow of an incompressible, yield stress fluid. *J. Rheol.* 41(1), 93-101.
- Tour., A (1992) *Hydraulique en charge des fluides thixotropes*, Ph.D thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble
- Trowbridge, J.H., (1987) Instability of concentrated free surface flows. *Journal of geophysical research*, 92(C9), 9523-9530.
- Vadot M.L., (1954) Quelques réflexions sur les pertes de charge, *La Houille Blanche* 2
- Walton, I.C., Bittleston, S.H., (1991) The axial flow of a Bingham plastic in a narrow eccentric annulus. *J. Fluid Mech*, 222, 39-60.
- Wang, Z., Lin, B., Zhang., X., (1993) Instability of non-Newtonian open channel flow. *Contributions to non-stationary sediment transport*, W. Kron, I.H.W., Universität Karlsruhe, Germany, E, 1-23.

Écoulement uniforme et écoulement graduellement varié en régime laminaire

White F.M (1986) Fluid Mechanics, MacGraw-Hill, New York, 2<sup>ème</sup> Ed

White (1974) Viscous fluid flow, MacGraw-Hill, New York

Zarling J.P, (1976) An analysis of laminar flow and pressure drop in complex shaped ducts, J. Fluids Eng, 1976, pp. 702-706