

# Rupture de barrage en régime laminaire : Modèle Newtonien

## I.1 Etude bibliographique

### I.1.1 Généralités

Durant ces dernières décennies des travaux de grande ampleur ont été consacrés aux applications de la mécanique des fluides aux problèmes géologiques. C'est la raison pour laquelle certains scientifiques distinguent cette nouvelle discipline par le nom de la mécanique des fluides géologiques (Huppert 1986).

En admettant cette distinction, on peut reconnaître que ces fluides sont des mélanges de divers matériaux existant dans la nature (l'eau, magma, sable, terre, argile, gaz, air, et débris végétaux et animaux...), avec une concentration solide telle que le mélange semble se déformer et s'écouler "sous conditions" comme un fluide homogène. Ainsi, les avalanches de neige poudreuse (mélange de neige, boue, pierre...), les écoulements de magma (mélange des matériaux rocheux en fusion et de gaz), les laves torrentielles (mélange d'eau, argiles, particules solides, air, débris végétaux et animaux), glissements de terrain, écoulements de sable, glissements sous-marin, les éboulements, peuvent être concernés par cette discipline. Ces écoulements sont d'aspect transitoire avec un front d'onde avançant, et ce sont des écoulements gravitaires. De plus, en regard de l'importance de la fraction solide existante dans ces mélanges, on peut aller plus loin en notant le caractère généralement très visqueux de ces écoulements géologiques.

L'étude de cette branche de la mécanique des fluides repose sur une gamme large d'applications géologiques. Un nombre important de problèmes a déjà été résolu mais le sujet continue à se développer et des problèmes intéressants pour les mathématiciens, les mécaniciens des fluides et pour les géologues sont posés.

Dans ce cadre, on pourra souvent admettre que le milieu est modélisable par un modèle continu, i.e les caractéristiques du modèle sont continues dans l'espace et dans le temps. On accepte en général que le milieu est continu lorsque la taille des particules élémentaire des différents constituants est faible devant la distance minimale entre les frontières du matériau. Un rapport de ces deux quantités inférieur à 1/50 (réf. Cours MMC- JM Piau) semble être raisonnable à cette échelle d'observation. Plus le rapport est grand plus il faut se méfier des discontinuités qui peuvent apparaître dans les champs des vitesses. Dans le cas des

phénomènes géologiques cités précédemment, on pourra presque toujours faire l'hypothèse du milieu continu.

Dès lors, ces écoulements peuvent être entièrement décrits et étudiés par les équations classiques déduites des principes de la mécanique des fluides : conservation de la masse, de la continuité de mouvement, de l'énergie et le second principe de la thermodynamique. Pour résoudre complètement ces équations lorsqu'on connaît les conditions initiales et les conditions aux limites, il est nécessaire d'y ajouter des relations reliant le tenseur des contraintes, le flux de chaleur par unité de surface, l'entropie massique et l'énergie libre aux variables de l'écoulement. Ces relations intrinsèques au matériau, i.e qui ne dépend pas d'un point de vue formel de l'écoulement particulier envisagé, sont les lois de comportement. Suivant le formalisme et les hypothèses de la mécanique rationnelle des milieux continus ces lois doivent vérifier un certain nombre de principes qui permettent de simplifier la forme générale des relations. Notamment on réduit souvent l'étude des lois de comportement à la recherche d'une relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations.

Le modèle mécanique le plus simple et le plus répondu (eau, air, huile...) est celui qui correspond au troisième principe de Newton (1687) disant que la force exercée par une couche de fluide sur une couche voisine est proportionnelle à la différence de vitesse entre ces deux couches. Navier (1827) puis Stokes (1945) ont proposé une formulation du tenseur des contraintes consistante avec le troisième principe de Newton, et qui s'exprime par une fonction linéaire et isotrope du tenseur des taux de déformation. Pour un modèle isochore le seul paramètre intervenant dans cette loi de comportement est la viscosité  $\mu$  (paramètre intrinsèque au matériau). Cependant, lorsqu'une expérience vient contredire les prévisions du modèle Newtonien, on a affaire à un fluide complexe et on introduit la viscosité apparente  $\eta$ . En cisaillement simple, cette viscosité est définie comme le rapport de la contrainte et du gradient de vitesse  $\dot{\gamma}$ . Cette viscosité dépend dans ce cas à la fois du matériau et de l'écoulement particulièrement envisagé.

Parmi les modèles de fluides complexes on peut trouver la famille des modèles viscoplastiques caractérisés par un seuil de contrainte, qu'il faut dépasser pour qu'ils s'écoulent. Cette classe des modèles à seuil concerne une gamme large de matières incluant les suspensions concentrées, matières alimentaires, émulsions, écumes, composites, graisses, (Bird & al 1983, Utracki 1988). Il existe aussi des effets de rhéofluidification (dans certains polymères fondus comme les caoutchoucs et la cellulose et des suspensions comme les peintures et les boues détergentes) ou de épaissement (comme dans les sables meublés

compactés), suivant que la viscosité diminue ou augmente avec le gradient de vitesse. On trouve également des effets de thixotropie caractérisés par une déstructuration sous écoulement et une restructuration en repos (comme le cas de certaines vases et peintures). Un même corps physique peut illustrer plusieurs comportements différents, correspondant chacun à un domaine de contrainte. Ainsi, lorsqu'on parle d'un fluide qui est représenté par une loi de comportement donnée, on devrait préciser dans quelle gamme de gradient de vitesse ou bien dans quelle gamme de contrainte.

Lorsqu'il s'agit de déterminer la loi de comportement utile pour des laves torrentielles, des difficultés apparaissent qui ont leur origine dans la complexité du milieu naturel (voir par exemple Coussot 1992). Les modèles théoriques proposés dans la littérature sont nombreux et très variés. Leur base est l'évaluation des principales interactions entre les différents constituants du milieu. Le cas simple traité est celui d'un milieu constitué de deux phases, une phase solide et une phase liquide. Ainsi, suivant la forme et la concentration des particules, la nature des phénomènes prépondérants et le comportement de la phase liquide, on trouve des dizaines de propositions (cf. Utracki 1988, Coussot 1992). Par exemple, on sait que si la fraction solide est faible, le comportement mécanique du mélange suit la même loi que le liquide interstitiel avec une viscosité absolue plus importante. Mais lorsque la concentration en matière solide approche la concentration d'entassement, le comportement du mélange change. Dans ce cas, les théories proposées ne représentent qu'une introduction à ce problème, et beaucoup de travaux restent à faire dans les années à venir.

Néanmoins, depuis quelques années, des travaux remarquables ont été consacrés à la caractérisation rhéométrique du comportement de quelques types de matériaux qui ressemblent aux laves torrentielles. Deux principaux modèles empiriques ont été testés, le modèle de Bingham et le modèle d'Herschel-Bulkley. Durant ces dernières années, une attention particulière a été donnée au modèle d'Herschel-Bulkley car celui-ci semble le mieux adapté dans une large gamme de gradient de vitesse (O'Brien & Julien 1988, Coussot 1992). Il faut cependant signaler que ce modèle d'Herschel-Bulkley ne tient pas compte de la thixotropie. Si cet effet semble être négligeable pour la plupart de boues fines naturelles (Coussot 1992), cela ne reste certainement pas vrai pour les sables mouvants et certains types de vases.

Ainsi comme première simplification, on peut admettre que les laves torrentielle, et pourquoi pas tous les fluides géologiques cités plus haut, peuvent être approchées par une loi de type Herschel-Bulkley. Il reste maintenant à évaluer l'impact de ces écoulements naturels en définissant des conditions aux limites et des conditions initiales appropriées. Comme

deuxième simplification, il semble que le problème classique de rupture de barrage répond bien à cet objectif : d'une part à cause de son caractère transitoire ; d'autre part puisqu'il possède un front avançant, et enfin par l'instantanéité de son déclenchement et la présence d'une surface libre en contact direct avec l'atmosphère. Ces caractéristiques générales sont partagées par les écoulements des laves torrentielles et par d'autres écoulements géologiques.

### 1.1.2 Position du problème de rupture de barrage

Pour pouvoir étudier sainement la rupture de barrage avec des fluides complexes, nous devons d'abord passer en revue les connaissances déjà acquises concernant ce problème. Ceci nous permettra d'aboutir à une conclusion concernant les travaux réalisés et de dégager notre programme d'étude.

Le problème de rupture de barrage compte parmi les plus anciens problèmes rencontrés en hydraulique. Les premières études sérieuses ont commencé il y a un peu plus d'un siècle. La position classique de ce problème est la suivante : un barrage construit sur une rivière forme un réservoir d'eau. En réponse à sa rupture, une onde de front avançante se produit qui provoque dans la plupart des cas des désastres catastrophiques pour la vie humaine et les constructions. De telles catastrophes sont heureusement assez rares, car la technique acquise de nos jours dans la construction des barrages assure la sécurité des riverains. Malheureusement, le passé et certains conflits internationaux ont montré que ce problème n'était pas purement théorique. En 1935, en Italie, une crue subite provoque la destruction complète du barrage de La Sella Di Zerbino. En 1941, les Allemands détruisent le barrage de Dnieproghes, en Ukraine. En 1959, la rupture accidentelle du barrage de Malpasset, sur le Reyran, provoque la destruction des bas quartiers de Fréjus, faisant 400 victimes. La liste des catastrophes est beaucoup plus longue et chaque année, dans le monde, en moyenne, 1 à 2 barrages de plus de 10 mètres de haut ont des problèmes tels qu'ils occasionnent la rupture partielle ou totale de l'ouvrage (cf. Paquier & Robin 1995).

Comme beaucoup d'autres problèmes relatifs à l'environnement, le problème de rupture de barrage n'a jamais été résolu complètement. Le nombre de paramètres intervenant dans l'écoulement sont trop nombreux : conditions initiales, conditions aux bords, rugosité et nature variée du sol, variabilité et complexité de la vallée, différences de végétation, pente variée du sol, mode de rupture, etc. Pour lancer l'étude de ces écoulements naturels, les chercheurs ont utilisé plusieurs simplifications, puis progressivement des complexités ont été introduites. Le problème physique est positionné comme suit : Un barrage obture un canal contenant une quantité donnée d'un fluide homogène. La rugosité, la forme et la pente du canal sont des

paramètres de l'écoulement. A  $t=0$  (où  $t$  est le temps), le barrage s'effondre complètement ou partialement, rapidement ou progressivement. Les conditions initiales et les conditions aux bords sont également des paramètres de l'écoulement. La discontinuité provoquée à  $t = 0^+$  entraîne à la fois la propagation d'un front d'onde et une variation des profondeurs du fluide en avant du front. La discontinuité en espace apparaît généralement au voisinage du front d'onde avec un ressaut hydraulique, c'est-à-dire une onde de choc, si le fond aval est mouillé. Ces discontinuités (en temps et en espace) rendent le problème encore plus compliqué (cf. Abbott 1973), mais des méthodes théoriques permettent de tourner cette difficulté.

Mathématiquement, les écoulements gravitaires à surface libre peuvent être étudiés à partir de la formulation bidimensionnelle, dite en eau peu profonde, des équations de la mécanique des fluides, qui suppose que la pression est hydrostatique le long d'une section transversale. De plus, dans plusieurs situations d'écoulement réel, la forme simplifiée de Barré de Saint-Venant (1871) (appelée également formulation 1D), peut être une approximation raisonnable du problème. Tout ceci est correct si la profondeur de l'écoulement est petite devant les longueurs d'ondes considérées.

### Solutions analytiques

Le grand avantage du système des équations hyperboliques de Saint-Venant est que celui-ci peut être transformé en un système d'équations différentielles. Dans certains cas, cette nouvelle forme devient plus simple à intégrer le long des courbes dites caractéristiques. Pour un canal rectangulaire de pente nulle où le fluide est initialement en repos et le fond aval est sec, la première solution théorique, dont le frottement pariétal est supposé négligeable, a été donnée par Ritter (1892). Cette solution prédit à la fois l'existence d'un point fixe dans la section du barrage et l'existence d'une onde négative caractérisée par une hauteur égale à la profondeur initiale de l'écoulement "H". Les vitesses de propagation de l'onde négative et de l'onde du front sont constantes, et le profil de la surface libre est une parabole qui tourne autour du point fixe en se déformant. Pour un canal de forme parabolique, la généralisation de cette solution de Ritter a été obtenue par Sakkas & Sterlkoff (1973). Puis Wu & al (1993) ont considéré une section transversale arbitraire décrite par un nombre de segments de lignes cassées. Chaque segment est représenté par sa longueur et son inclinaison. La solution de Ritter décrit bien les résultats expérimentaux hormis dans la zone du front d'épaisseur quasi nulle. Il faut naturellement considérer le frottement pariétal dans cette zone. Dans ce cadre, Dressler (1952) puis Witham (1955) ont introduit dans le problème la formule empirique de Chézy. Les deux approximations utilisées par Dressler et Witham sont différentes, mais leurs

résultats donnent des expressions très proches de la vitesse de propagation du front. Plus tard, Su & Barnes (1970) étendent l'analyse de Dressler pour un canal incliné de forme prismatique.

Cependant, Pohle (1952) met en doute le modèle de Saint-Venant, qui suppose que la répartition de pression est hydrostatique et que l'écoulement s'effectue par tranches. Pour se prononcer, l'auteur se base sur la solution théorique de Ritter, qui prédit une hauteur constante à l'endroit du barrage. Selon Pohle, ce résultat ne représente pas la physique réelle de l'écoulement. Pohle propose donc une autre solution. Il considère un canal horizontal de section rectangulaire et sans eau aval (même condition d'écoulement que Ritter). Il suppose ensuite que l'écoulement est irrotationnel et que les effets dissipatifs sont négligeables pour ne considérer que les forces de pesanteur. Il écrit les équations de la dynamique et les conditions d'incompressibilité et d'irrotationnalité en coordonnées de Lagrange. Il admet une solution générale sous la forme d'un polynôme en  $t$ , et fait l'identification en supposant le temps petit. Ce calcul donne une trajectoire rectiligne pour chaque particule et met en évidence : d'une part, l'existence d'un point anguleux qui se déplace verticalement, dans la section du barrage ; d'autre part, l'existence d'une différence de concavité de part et d'autre de ce point singulier. Sterlkoff (1986) et Mohapatra & al (1999) ont également montré numériquement que la pression n'est pas hydrostatique immédiatement après la rupture. Dressler (1954) démontre expérimentalement que la profondeur du fluide à l'endroit du barrage ne peut atteindre la valeur constante prédite par Ritter qu'au-delà d'un certain temps. Cependant, le calcul de Pohle, qui suppose que l'écoulement est irrotationnel, a trouvé quelques critiques notamment par Dressler. Car le point anguleux, qui se déplace dans la section du barrage, n'a pas été observé expérimentalement. De plus, cette solution n'admet pas l'existence d'une onde négative, alors que les expériences sont concluantes sur cet effet. En réalité, Dressler a effectivement observé un point anguleux, mais celui-ci était en déplacement vers l'amont et non pas fixe comme Pohle le prédit.

Lorsque la suppression du barrage a lieu sur un aval mouillé, on connaît la solution de Stoker (1957) qui suppose la surface libre constituée par un arc de parabole (calculé par Ritter) se raccordant à un profil horizontal limité à l'aval par une onde de choc. Lorsque le canal est incliné, on connaît également les solutions asymptotiques de Hunt (1982, 83, 84, 94) qui supposent que tous les termes, intervenant dans l'équation dynamique de Saint-Venant, sont négligeables sauf la gravité et le frottement. Cette approximation est appelée onde cinématique, et elle prédit une hauteur non nulle dans l'abscisse du front d'onde.

Avant de commencer la représentation des résolutions numériques de ce problème de

rupture de barrage, signalons d'abord qu'il existe des méthodes de résolutions graphiques, analogues à celle de Bergeron pour le calcul des coups de bélier (e.g Ré 1946). Ces méthodes sont à l'heure actuellement abandonnées au profit des méthodes de résolution numérique. Il existe également des méthodes de résolution par abaques qui sont largement utilisées par les ingénieurs (cf. Colin & Pochat 1978), mais qui présentent l'inconvénient de ne s'appliquer qu'aux situations particulières.

## Résolutions numériques

Les études numériques reportées dans la littérature sont nombreuses. Dans l'objectif de notre travail ici, nous n'en retenons que quelques unes, et nous évitons au maximum de rentrer dans les détails des schémas numériques utilisés. Nous essayons surtout de tirer les principaux acquis apportés par ces études numériques.

Les premières réalisations utilisent des schémas basés sur la méthode des différences finies. Tout le mérite de ces travaux repose sur la théorie des caractéristiques. Cette théorie est valable pour des systèmes d'équations hyperboliques. On transforme, à l'aide de l'opérateur Jacobien, les équations du mouvement en une forme non-conservatrice, puis cette nouvelle forme est intégrée dans le plan  $x-t$  défini selon les courbes de caractéristiques. Parmi ceux qui ont utilisé cette technique, on peut citer : Faure et Nahas 1961, Freeman et Lémehauté 1964, Cunge 1970, Sakkas et Sterlkoff 1973-1976, Fread et Harbaugh 1973, Rajar 1978, Chen 1980, Chen et Armbruster 1980, Katapodes et Schamber 1983, Schamber et Katapodes 1984, Elliot et Ghaudhry 1993, Gozali et Chasse 1993, Yang & al 1993, Hicks & al 1997 et d'autres. Les investigateurs supposent la formulation 1D de Saint Venant valable. Cependant, pour représenter les différentes discontinuités (en espace et en temps) qui apparaissent dans l'écoulement, il a fallu introduire quelques simplifications :

- Les conditions initiales sont définies par l'état du canal (ou la rivière) à  $t = 0^-$ . La discontinuité brutale à  $t = 0$  occasionnée par la rupture instantanée du barrage, pose des problèmes dans certains schémas numériques, de telle sorte que les conditions initiales réelles de l'écoulement ne peuvent pas être prises en compte. Pour surmonter le problème de cette discontinuité, quelques auteurs ont fait appel aux solutions analytiques de viscosité nulle sur un fond horizontal, telle que la solution de Ritter (e. g Sakkas et Sterlkoff 1973-1976). Ces solutions ont été utilisées seulement pour lancer l'exécution du calcul et justifiées en se référant aux solutions approximatives de Dressler (1952) et Su et Barnes (1970) concernant les effets négligeables du frottement et la pente immédiatement après la rupture de barrage. Si la rupture est partielle, le calcul de la condition initiale

s'effectue à l'emplacement du barrage, par exemple en supposant que cette section est critique (nombre de Froude égal à 1, voir Schamber et Katapodes 1984).

- Si le fond aval est mouillé, dans un premier temps, l'onde de choc créée par le front d'onde a été calculée séparément de l'écoulement amont à partir des relations équivalentes à celles de Rankine-Hugoniot relatives à la dynamique de gaz (e.g Chen 1980 et Elliot & Ghaudhry (1993)). Dans ces dernières années, des schémas numériques qui ne nécessitent pas de localisation de l'onde de choc ont été testés, tels que : le schéma de Gabutti (Fennema et Ghaudhry 1987), des schémas basés sur la technique de "flux difference splitting" (Glaister 1989-1993, Jha & al 1995) et des schémas basés sur la méthode semi-Lagrangienne ou méthode d'interpolation (Garcia-Navarro & Priestley 1994). Ces schémas permettent aussi de surmonter le problème de la discontinuité brutale à  $t = 0$ .
- Si le fond aval est sec, les relations de Rankine-Hugoniot ne seront pas valables, il est nécessaire dans ce cas de prendre la condition exacte au bord aval de l'écoulement qui exprime que la profondeur est nulle (vérifiée expérimentalement par Dressler 1954 et également dans l'étude présentée ici). Cependant, comme toutes les lois de frottement employées sont inversement proportionnelles à la profondeur de l'écoulement, le frottement tend alors vers l'infini à l'abscisse du front d'onde, d'où un problème pour la résolution numérique. Afin de tourner cette difficulté, quelques investigateurs utilisent une petite profondeur d'eau pour définir la position du front d'onde (ex. Rajar 1978, Fennema et Ghaudhry 1987, Glaister 1989-1993, Jha & al 1995, Garcia-Navarro & Priestley 1994). D'autres supposent un petit débit constant existant à tout moment en aval (Chen 1980). En outre, certains investigateurs utilisent une technique déduite de la solution simplifiée suggérée par Witham (1955) qui revient à supposer que la répartition de vitesse est uniforme dans la région frontale (ex. Sakkas et Sterlkoff 1973-1976, Katapodes et Schamber 1983).
- La condition en amont est en général représentée par la propagation de l'onde négative dans le réservoir (cf. Rajar 1978, Sakkas et Sterlkoff 1973), calculée à partir des courbes caractéristiques. Si initialement, le régime d'écoulement n'est pas à vitesse nulle, ce calcul se ramène d'abord au calcul d'une courbe de remous effectué par le même principe que le calcul des mouvements permanents (Faure et Nahas 1961, Rajar 1978). Des difficultés apparaissent lorsque l'onde négative atteint la limite amont du réservoir. L'onde négative n'aura pas de sens physique. Et à notre connaissance, dans le cas horizontal, aucune solution analytique n'a été donnée dans la littérature.

Les résultats de ces études numériques indiquent essentiellement l'influence de la pente, du



frottement, de la forme de la section transversale et de la condition initiale de l'écoulement. Par exemple, ils confirment les observations de Dressler (1954) (et d'autres chercheurs) concernant, l'effet négligeable du frottement sur la vitesse de propagation de l'onde négative et la forte influence du frottement pariétal dans la région frontale (voir par exemple Sakkas et Sterlkoff 1973). Ils démontrent également la validité de l'approximation de Witham concernant la répartition quasi-uniforme des vitesses dans la région frontale.

Les conditions initiales étudiées sont variées. La plus simple est analogue à la condition d'écoulement étudiée par Ritter. La condition initiale correspondant à un fond aval mouillé (comme celle étudiée analytiquement par Stocker) a été également traitée numériquement. De plus, la pente du canal, avec ou sans écoulement initial, rupture complète ou partielle du barrage, et même dans des géométries quelconques ont été tous l'objet de ces études numériques. Quelques investigateurs ont également appliqué leurs calculs sur des rivières existantes (Rajar 1978, Chen et Armbruster 1980).

Signalons que pour valider ces calculs, Cunge (1970) a utilisé les expériences de Cavalier (1965), Faure et Nahas (1961) ont utilisé leurs propres résultats, Elliot et Ghaudhry (1993) ont utilisé les expériences de Miller et Ghaudhry (1989). Pratiquement tous les autres chercheurs se sont servis des résultats expérimentaux de Dressler (1954) et surtout des résultats obtenus par US Army (1960-61). Selon Elliot et Ghaudhry (1993) la formulation 1D de Saint-Venant reste valable même dans des canaux courbés. Il est bien également de signaler que Katapodes et Schamber (1983) ont comparé trois prédictions théoriques : la solution numérique du modèle de Saint-Venant sous sa forme générale ; la solution numérique de ce même modèle mais en négligeant complètement l'inertie, et puis la solution d'onde cinématique qui revient à négliger de plus la pente de la surface libre. L'accord entre ces trois solutions est remarquable. Par la même méthode des caractéristiques, Townson et Al-Salihi (1989) ont montré l'effet de l'écoulement radial (dans l'espace R-T). Les applications ont été réalisées dans plusieurs modèles physiques ; prismatiques dans le réservoir et divergents (ou convergents) dans le canal, et vice versa. Les mesures et les résultats numériques ont été comparés avec succès. Les auteurs démontrent ainsi que les profondeurs de l'écoulement et les vitesses moyennes diminuent dans les sections convergentes et augmentent dans les sections divergentes. Donc, la profondeur du fluide à l'emplacement du barrage est supérieure à  $(4/9)H$  (solution de Ritter, canal et réservoir de forme prismatique) dans le cas d'un canal convergent et inférieure à cette valeur dans le cas d'un canal divergent. Les écoulements tridimensionnels dans l'hypothèse de l'eau peu profonde ont fait également l'objet de quelques études numériques

(cf. Katapodes & Sterlkoff 1978, Glaister 1993, et Fraccarollo & Toro 1996). Le problème étudié par Glaister (1993) est la rupture d'un barrage de forme cylindrique, aucune validation physique n'a été présentée par l'auteur. Tandis que, Fraccarollo & Toro (1996) ont comparé leurs calculs à leurs propres résultats expérimentaux.

La méthode des différences finies a été également utilisée pour résoudre le système d'équations du mouvement sous sa forme conservatrice. Xanthopoulos et Koutitas (1976) ont considéré le cas d'un écoulement tridimensionnel dans l'hypothèse que la répartition de pression est hydrostatique et que l'inertie est négligeable. Le calcul a été comparé aux mesures, et un bon accord est obtenu pour de faibles hauteurs initiales de l'écoulement. Le schéma de MacCormack (Bellos & Sakkas 1987, Aguirre-PE & al 1995) et le schéma de Beam et Warming (Fennema et Ghaudhry 1987-1989) ont été également utilisés pour intégrer les équations de Saint-Venant. Balloffet & al (1974) ont appliqué la méthode de différences finies pour évaluer l'impact d'une rupture de barrage sur une rivière existante. Notons que pour surmonter le problème de discontinuité en temps, le schéma de MacCormack fait appel à la solution inertielle de Ritter. Et dans le cas de calculs faisant intervenir un front d'onde avançant sur lit sec, ce schéma nécessite d'avoir une petite profondeur en aval. Notons également que Zhang & al (1992) ont proposé un schéma implicite, analogue à la méthode SIMPLER, sans utiliser aucune hypothèse relative aux conditions d'écoulement à proximité du front sur lit sec.

D'autres chercheurs également ont travaillé sur des modèles d'écoulement en formulations locales (cf. Mohapatra & al 1999). Le but de ces investigateurs est de résoudre les équations de Navier-Stokes sans utiliser aucune hypothèse relative à la répartition de la pression. En négligeant les termes visqueux devant les termes d'inertie, ils démontrent que :

- Lorsque le fond aval est mouillé, les vitesses du front d'onde et de l'onde négative sont bien décrites par l'hypothèse de la répartition hydrostatique de la pression, i. e les équations de Saint-Venant (solution de Stocker). Par contre, lorsque le fond aval est sec, la vitesse du front d'onde et la vitesse de l'onde négative sont  $1.6\sqrt{gH}$  et  $1.3\sqrt{gH}$ , respectivement, au lieu de  $2\sqrt{gH}$  et  $\sqrt{gH}$  (solution de Ritter basée sur le modèle de Saint-Venant qui suppose que la répartition de pression est hydrostatique).
- L'évolution de la distribution de pression vers l'état hydrostatique est plus rapide dans le cas du fond mouillé qu'avec un fond sec. De plus cette évolution est toujours moins rapide dans le réservoir que dans le canal.
- La profondeur de l'écoulement à l'emplacement du barrage atteint effectivement la valeur

théorique de Stocker (ou Ritter dans le cas du fond sec). Cependant, cette valeur n'est atteinte qu'après un certain temps. Dans le cas d'un fond aval sec, ce temps est approximativement égal à  $8\sqrt{H/g}$ .

En plus des méthodes des différences finies, il existe également des schémas aux éléments finis basés sur la méthode de Galerkin (Cooley et Moin 1976, Katapodes 1984, Katapodes et Wu 1986, Yang & al 1993, Alam & al 1995, Hicks & al 1997). Ainsi que des schémas aux volumes finis (Soulis 1992). L'intérêt de ces méthodes est de permettre l'étude des écoulements tridimensionnels dans des géométries complexes. Leur inconvénient est la durée importante de l'exécution du programme. Notons que pour valider leurs calculs numériques, Hicks & al (1997) se sont servis des expériences de Bellos & al (1992). Ils confirment ainsi les résultats de Elliot et Ghaudhry (1993) concernant la validité de la formulation 1D de Saint-Venant pour des canaux non prismatiques.

Signalons que la plupart de ces études numériques sont basées sur la loi de frottement empirique de Manning (de type turbulente). Chen (1980) a utilisé une formule différente supposée valable dans la région transitoire (laminaire/turbulent), qui représente une combinaison empirique entre la formule de Manning et une formule de type laminaire. Aguirre-PE & al (1995) ont utilisé également une loi différente de type laminaire. Lorsqu'il s'agit des écoulements tridimensionnels, les investigateurs adoptent une formule qui est une généralisation de la formule unidirectionnel de Manning.

Pour finir, il est également bien de signaler que si le lit aval est sec, la plupart de ces résultats numériques ne sont valables que pour  $t$  petit, car les approximations introduites au voisinage du front engendrent une conséquence sur la conservation de la masse (facile à vérifier à partir des résultats présentés). En effet, puisque le calcul est itératif, il en résulte une accumulation d'erreurs qui devient non négligeable à partir d'un certain temps.

## Etudes expérimentales

Les expériences citées dans la littérature diffèrent selon les caractéristiques des modèles réduits utilisés. La condition initiale d'écoulement la plus répandue (Schoklitsch 1917, Dressler 1954, Cavaillé 1965, Estrade 1967 etc.) est représentée sur la Figure 1a, donc le canal est horizontal et prismatique de section rectangulaire avec un fond aval sec. De plus, le fluide est maintenu initialement au repos dans le réservoir et la rupture est supposée instantanée. L'ensemble des études réalisées avec cette condition révèle un bon accord avec la solution théorique de Ritter hormis dans la zone du front d'épaisseur quasi nulle. Ici, un ressaut hydraulique mobile se produit au voisinage du front d'onde suivi par une série

d'ondulations (ondes de Favre). Notons cependant que Estrade a observé une différence de concavité entre les mesures du profil de l'écoulement et la prédiction théorique de Ritter. Cette différence ne se localise pas seulement dans la région frontale mais affecte l'ensemble de l'écoulement. Pour pouvoir expliquer ce désaccord, Estrade a comparé ces résultats à la théorie de Pohle avec laquelle il constate un meilleur accord pour  $t < 0.7\sqrt{H/g}$  où  $g$  est l'accélération de pesanteur. Il attribue donc la différence obtenue par rapport à la solution de Ritter aux effets de la non distribution hydrostatique de la pression. La condition d'écoulement avec fond aval mouillé a été également étudiée par un nombre important de chercheurs (Levin 1952, Cavaillé 1965, Estrade 1967, Stansby & al 1998). Si  $h_1$  est la profondeur de l'eau aval, il apparaît pour  $0.05 < h_1/H < 0.1$ , que le profil de la surface libre est conforme au schéma de Stocker (1957). Pour  $h_1/H$  supérieur à 0.1, Levin (1952) a observé la formation d'une surélévation frontale. Les mêmes observations ont été confirmées par Estrade (1967) qui donne plus de détail sur l'évolution de cette surélévation. Pour  $h_1/H < 0.2$ , Estrade remarque que la surélévation est un phénomène peu important : L'eau amont jaillit par-dessus l'eau aval provoquant le déferlement immédiat de l'onde. Pour  $h_1/H \approx 0.3$ , l'amplitude de la surélévation est maximale et pour  $h_1/H > 0.3$ , l'onde est essentiellement constituée par l'eau aval. Quant à l'influence de la rugosité, elle ne semble pas intervenir immédiatement après la rupture, mais elle déforme dans le temps le profil d'onde. Pour avoir une idée sur ces phénomènes, nous envoyons les lecteurs à l'article de Stansby & al (1998), où des photographies assez intéressantes ont été présentées.

Schoklitsh (1917), US Army (1960-61) et Fraccarollo & Toro (1996) se sont essentiellement intéressés à la rupture partielle du barrage. Gozali & Chasse (1993) ont présenté des résultats pour l'écoulement dans un réservoir après la formation d'une brèche partielle dans le barrage. L'influence de la durée finie de la rupture a été étudiée par Estrade (1967) et surtout par Menendez & Navarro (1991). Selon Estrade, la durée finie de la rupture peut également expliquer la différence de concavité entre ces mesures du profil de l'écoulement et la prédiction théorique de Ritter. Si  $\tau$  est le temps fini de la rupture, Menendez & Navarro (1991) démontrent que le débit instantané traversant la section du barrage atteint le régime stationnaire " $q_{\max}$ " après un temps  $t_e$  ( $< \tau$ ), tel que :

$$t_e \approx 0.606\tau - 0.000151\tau^3 \quad ; \quad q_{\max} \approx 0.296 - 1.22\tau - 0.000000375\tau^3$$

Tandis que la profondeur du fluide atteint le régime stationnaire " $h_n$ " après un temps  $t_n$  ( $> \tau$ )

, donné approximativement par :

$$t_c \approx 5.73 + 1.20\tau$$

avec  $h_n \approx 0.50H$ , résultat un peu supérieur à la valeur théorique de Ritter (0.44 H). Les variables intervenant dans ces formules sont représentées en variables adimensionnelles dont les références sont  $\sqrt{H/g}$  pour les temps et  $H\sqrt{gH}$  pour le débit (par unité de largeur du canal).

Les écoulements bidimensionnels ont été étudiés par Bellos & al (1992) dans un canal convergent-divergent de section rectangulaire, par Miller (1989) et Cloche & al (1992) dans un canal à la fois courbé et prismatique, et également par Fraccarollo & Toro (1996). Dans certaines études, les auteurs ont joué également sur la pente du canal (voir e.g. Fraccarollo & Toro 1996, Bellos & al 1992, Aguirre-PE & al 1995). D'après leurs résultats, la pente du canal ne semble pas intervenir immédiatement après la rupture.

Pour finir, on peut également citer l'étude expérimentale de Capart et Yong (1998) qu'ont considéré le problème de rupture de barrage sur un fond granuleux. Selon eux, cette condition d'écoulement peut servir à interpréter le phénomène de transport solide observé dans l'écoulement naturel de débris. Notons que les auteurs ont observé la formation d'un ressaut hydraulique au voisinage du front d'onde et qui l'ont illustrée par des photographies.

## 1.2 Délimitation du problème

Après avoir passé en revue les études déjà réalisées concernant le problème de rupture de barrage, il apparaît que l'eau fut longtemps la seule substance intéressant les chercheurs. Les propriétés de ce fluide sont bien connues ; de comportement Newtonien, peu visqueux et souvent rencontré dans la nature en écoulement turbulent. Ainsi, les modèles d'écoulement utilisés sont basés sur des lois de frottement de type turbulent et les résolutions analytiques et numériques de ces modèles n'a concerné que la phase initiale de l'écoulement où le régime est essentiellement inertiel. Ceci est compréhensible, car la plupart des catastrophes naturelles relatives à la position classique de ce problème sont dues à l'eau et la violence des dégâts est surtout réalisée à la phase initiale de l'écoulement. Cependant, lorsqu'on a affaire à des écoulements de fluides plus visqueux, comme ceux des laves torrentielles, cette tendance est moins prononcée et l'écoulement peut être laminaire. Ainsi, durant ces dernières décennies, quelques modèles mathématiques faisant intervenir la loi de comportement du matériau ont été proposés. Les solutions obtenues sont surtout numériques et généralement confrontées à des problèmes ; les avalanches de neiges (Martinet 1992), glissement des roches (Trunk & al.

1986), glissement de terrain (Sousa & Voight 1991), les écoulements de boue et de débris (Lang & Dent 1987), les écoulements du magma (Huppert 1986), et d'autres. Le problème de rupture de barrage a été également traité avec des lois de frottement de type laminaire (Hunt 1994, Aguirre-PE & al 1995). La solution analytique de Hunt est supposée valable lorsque le canal est incliné et que le front d'onde parcourt une distance supérieure à 4 fois la longueur du réservoir. La solution de Aguirre-PE & al 1995 est numérique et testée uniquement dans le cas incliné.

Puisque notre étude concerne les écoulements laminaires, il apparaît nécessaire de réexaminer et de compléter ce problème de rupture de barrage pour le modèle également Newtonien mais très visqueux. Ceci constitue le premier objectif de ce chapitre. Le deuxième objectif est de tracer les lignes d'une base d'étude complète et saine pour aborder ensuite le problème avec des fluides plus complexes. Notons aussi que parmi les intérêts industriels directs de ce travail figure l'exploitation des données consistométriques des fluides très visqueux impliqués dans de multiples domaines.

Ce chapitre est organisé comme suit : nous commençons par l'étude théorique. Les équations de Navier-Stokes sont simplifiées suivant le schéma de Piau (1996) et on aboutit à la formulation 1D de Saint-Venant. Le terme de frottement intervenant dans ce modèle de Saint-Venant est évalué à partir de l'écoulement uniforme en régime laminaire. Nous particularisons ensuite ces équations pour le problème de rupture de barrage. La solution inertielle de Ritter sera discutée dans la quatrième section. Puis, nous étudierons dans la cinquième section la phase visqueuse de ce problème. Un modèle d'écoulement fonction de la profondeur du fluide seulement sera déduit à partir des équations de Saint-Venant. Les solutions semblables de ce modèle sont obtenues suivant que le réservoir est infiniment grand ou bien limité. Nous étudions dans la sixième section la transition entre la phase inertielle et la phase visqueuse. Nous proposons ici un ensemble de lois, dans la région frontale où il est supposé que le frottement visqueux est prépondérant, et dans la région supérieure où il est supposé que l'influence du terme de frottement est minimale.

Chaque des solutions analytiques est valable lorsque le temps est restreint à une plage de variations adéquate. Nous proposerons dans la septième section une solution approchée globale qui regroupe différents régimes d'écoulement.

L'effet de la pente sera concentré dans la neuvième section. Nous proposons ici d'étudier la phase visqueuse en fonction d'un seul paramètre dépendant de la condition initiale de l'écoulement. Une extension de la solution approchée de Hunt sera également présentée. L'expérience et les résultats théoriques seront comparées, puis discutées dans la dixième

section et nous concluons à la fin.

Signalons enfin que le texte qui suit a été dépouillé au maximum des développements mathématiques. Nous avons pris cependant soin d'exposer l'idée principale derrière tout calcul de telle sorte que le lecteur puisse facilement refaire les calculs et éventuellement étendre notre analyse à d'autres conditions d'écoulement.

### I.3 Analyse de Piau appliquée au cas d'un modèle Newtonien

En 1996, Piau a écrit les équations générales de l'écoulement des fluides qui suivent la loi d'Herschel-Bulkley. Ces équations sont normalisées et discutées en utilisant l'approximation de l'eau peu profonde et une attention particulière a été portée à l'influence du terme dû au seuil de contrainte. Après simplifications, Piau aboutit à une généralisation de la formulation 1D de Saint-Venant, qui outre le frottement pariétal non linéaire se distingue par un terme supplémentaire dû aux effets élongationnels dépendant du seuil de contrainte.

Nous examinerons le modèle complet plus tard, ici nous nous intéressons au cas particulier d'un fluide de comportement Newtonien. Nous supposons que les particules fluides sont animées d'un mouvement de vitesse  $\vec{u}$  relative à un repère Galiléen suivant la direction  $x$ . La composante de vitesse le long de cet axe est noté  $u$ . Les autres composantes sont  $v$  le long de l'axe  $y$  et  $w$  le long de l'axe  $z$  (Figure 1b). Les équations de base sont celles de la mécanique des fluides : équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sous forme locale. Nous supposons que l'écoulement est laminaire, isotherme et isochore. Le frottement interne peut être alors représenté par le troisième principe de Newton où la viscosité est le seul paramètre rhéologique. Ainsi, les équations du mouvement se réduisent aux équations de Navier-Stokes :

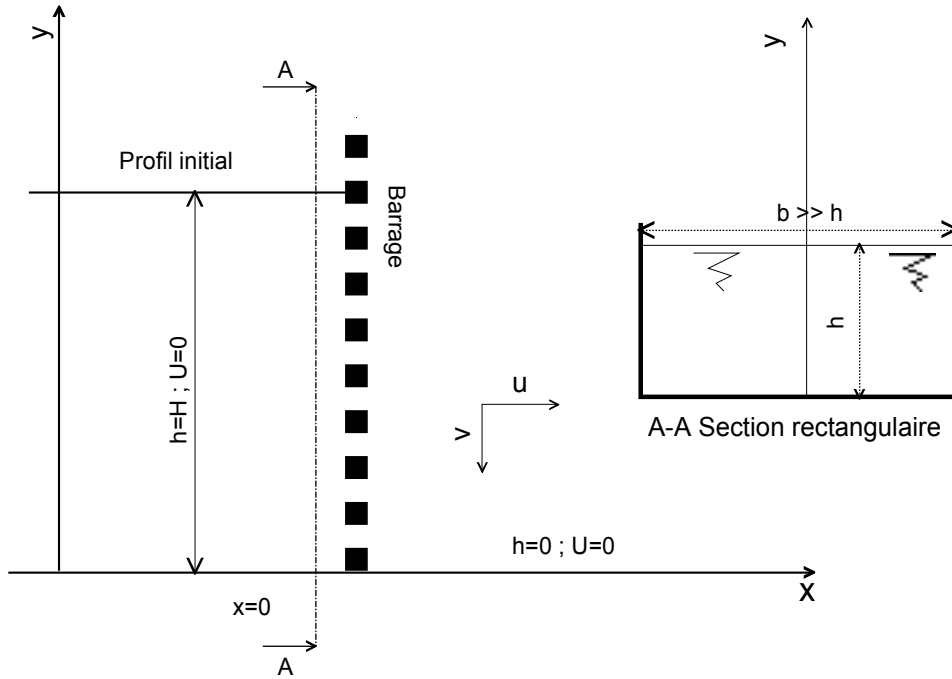
$$\rho \dot{\vec{u}} = \rho \vec{g} - \text{grad } p + 2\mu \text{div} \mathbf{D} \quad (1)$$

et l'équation de continuité

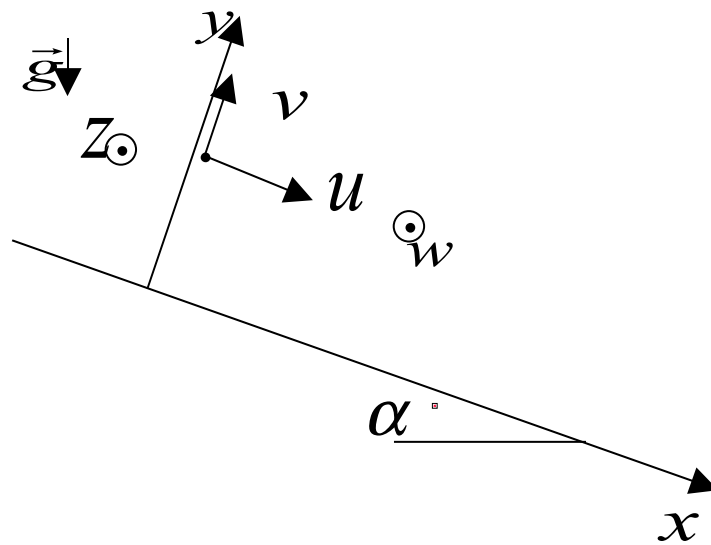
$$\text{div} \vec{u} = 0 \quad (2)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $\mu$  la viscosité,  $\vec{g}$  est l'accélération gravitationnelle,  $p$  est la pression et  $\mathbf{D}$  est le tenseur du taux de déformation.

L'espace de l'écoulement est supposé être beaucoup plus large qu'il est épais. Il est raisonnable de réduire dans ce cas l'ensemble de ces équations aux deux composantes dans la direction  $x$  et dans la direction  $y$ . Ces équations sont la formulation complète dans le cas de l'écoulement bidimensionnel dans le plan  $(x, y)$ , et il résulte :



(a) Etat du canal à  $t=0$ , canal horizontal



(b) système de coordonnées

Figure 1: Etat du canal à  $t=0$  ; définitions et système de coordonnées

$$\rho (u_{,t} + uu_{,x} + vv_{,y}) = -p_{,x} + \rho g \sin(\alpha) + \mu (u_{,xx} + u_{,yy}) \quad (3)$$

$$\rho (v_{,t} + uv_{,x} + vv_{,y}) = -p_{,y} - \rho g \cos(\alpha) + \mu (v_{,xx} + v_{,yy}) \quad (4)$$



$$u_{,x} + v_{,y} = 0 \quad (5)$$

où  $\alpha$  est la pente du canal (voir Figure 1b).

Deux dimensions caractéristiques de l'écoulement peuvent être considérées,  $L_0$  dans la direction de la longueur, et  $h$  qui représente l'épaisseur. Un ensemble de variables adimensionnelles normalisées sont choisies (leur ordre de grandeur est 1). Des lettres capitales indiquent les variables normalisées. Pour les coordonnées d'espace et de temps, elles sont choisies comme suit

$$(X, Y, T) = \left( \frac{x}{L_0}, \frac{y}{\varepsilon L_0}, \frac{U_0}{L_0} t \right) \quad (6)$$

où la référence  $U_0$  et le paramètre  $\varepsilon$  sont introduits. Ce paramètre  $\varepsilon$  est le rapport  $h/L_0$ .

Les deux composantes réduites de vitesse ( $U$  et  $V$ ) sont :

$$(U, V) = \left( \frac{u}{U_0}, \frac{v}{\varepsilon U_0} \right) \quad (7)$$

La composante  $v$  est normalisée par l'intermédiaire de l'équation de continuité.

En supposant que la pression hydrostatique donne la norme pour la pression, il vient :

$$P = \frac{p}{\rho g \varepsilon L} \quad (8)$$

Ainsi, en introduisant ces variables adimensionnelles, les équations du mouvement devient :

$$U_{,T} + UU_{,X} + VU_{,Y} = -\frac{1}{\varepsilon Fr^2} (\varepsilon P_{,X} - \sin(\alpha)) + \frac{1}{Re} (\varepsilon^2 U_{,XX} + U_{,YY}) \quad (9)$$

$$\varepsilon^2 (V_{,T} + UV_{,X} + VV_{,Y}) = -\frac{1}{Fr^2} (P_{,Y} + \cos(\alpha)) + \frac{\varepsilon^2}{Re} (\varepsilon^2 V_{,XX} + V_{,YY}) \quad (10)$$

où  $Fr$  et  $Re$  sont respectivement, le nombre de Froude et le nombre de Reynolds :

$$Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gh}}; \quad Re = \frac{\rho U_0 h}{\mu} \frac{h}{L} \quad (11)$$

Notons que l'équation de conservation de la masse ne fait apparaître aucun nombre adimensionnel.

En limitant maintenant ces expressions au cas spécifique où  $\varepsilon$  est petit devant 1, il vient :

$$U_{,T} + UU_{,X} + VU_{,Y} = -\frac{1}{\varepsilon Fr^2} (\varepsilon P_{,X} - \sin(\alpha)) + \frac{1}{Re} (0 (\varepsilon^2) + U_{,YY}) \quad (12)$$

$$0 (\varepsilon^2) = -\frac{1}{Fr^2} (P_{,Y} + \cos(\alpha)) + 0 (\varepsilon^2) \quad (13)$$

En associant ces deux équations, il apparaît que l'inertie, la pression, la gravité et le frottement visqueux ont les ordres de grandeur : 1,  $1/Fr^2$ ,  $1/Fr^2$ ,  $1/Re$ , respectivement. Si  $Re$  n'est pas petit, on obtient à l'ordre 0 ( $\varepsilon^2$ )

$$\rho (u_{,t} + uu_{,x} + vu_{,y}) = -p_{,x} + \rho g \sin(\alpha) + \mu u_{,yy} + 0(\varepsilon^2) \quad (14)$$

$$p_{,y} = -\rho g \cos(\alpha) \quad (15)$$

Négligeant la tension superficielle, l'équation (15) peut être alors intégrée le long de  $y$ , soit :

$$p = \rho g(h - y) + p_0 \quad (16)$$

où  $p_0$  est la pression atmosphérique. Il résulte que la répartition de la pression le long de  $y$  est hydrostatique. En utilisant l'équation (16), l'équation (14) peut être réécrite comme suit :

$$\rho (u_{,t} + uu_{,x} + vu_{,y}) = -\rho g \cos(\alpha) h_{,x} + \rho g \sin(\alpha) + \mu u_{,yy} + 0(\varepsilon^2) \quad (17)$$

Cette équation constitue la forme simplifiée des équations de Navier-Stokes dans l'approximation d'un domaine très long.

### 1.3.1 Formulation 1D : Modèle de Saint-Venant

Il s'agit des mêmes équations de conservation que précédemment mais écrites pour des valeurs moyennes dans une section. Si on applique le principe de conservation de la masse à un domaine délimité par deux sections transversales,  $S_x$  et  $S_{x+dx}$ , et en supposant que le système est fermé, i.e qu'il n'existe pas un débit entrant ou sortant de ce domaine, on obtient une formulation globale du principe de la conservation de la masse, soit :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

où  $Q = SU$  est le débit global traversant la section mouillée  $S$ , et  $U$  étant la vitesse moyenne. Pour une section rectangulaire de largeur  $b$ ,  $S = bh$ . Il est avantageux dans ce cas d'introduire un débit par unité de largeur du canal ' $q$ ', tel que  $q = Q/b$ . Ainsi, l'équation (18) se réécrit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

ou bien

$$h_{,t} + hU_{,x} + Uh_{,x} = 0 \quad (20)$$

avec

$$U = \frac{\int_0^h u dy}{h} \quad (21)$$

La forme globale de l'équation dynamique peut être obtenue directement en intégrant l'équation (17) de  $y = 0$  à  $y = h(x,t)$ . En utilisant la règle de Leibnitz pour la dérivation sous le signe intégral, il résulte :

$$U_{,t} + \beta U U_{,x} + (1 - \beta) U h_{,t} + g \cos(\alpha) h_{,x} = - \frac{\tau_w}{\rho h} + g \sin(\alpha) + 0 (\varepsilon^2) \quad (22)$$

où  $\beta$  est un coefficient de forme qui tient compte de la répartition de vitesse le long de (Oy).

$$\beta = \frac{\int_0^h u^2 dy}{h U^2} \quad (23)$$

Ce coefficient dépend du nombre de Reynolds :  $\approx 1.03$  pour l'écoulement turbulent et  $\approx 1.2$  pour l'écoulement laminaire.

$\tau_w = \mu (u_{,y})_{y=0}$  est la contrainte tangentielle à la paroi. Remarquons que le ralentissement visqueux du fluide par les parois est responsable des forces de frottement.

En posant la pente de frottement  $J$  égale à  $\tau_w / \rho g h$  et en négligeant le troisième terme du premier membre de l'équation (22) car  $\beta \approx 1$ , il vient :

$$U_{,t} + \beta U U_{,x} + g \cos(\alpha) h_{,x} = g(\sin(\alpha) - J) \quad (24)$$

Les équation (24) et (20) représentent la formulation 1D de Saint-Venant. Par simplification, les auteurs considèrent généralement  $\beta = 1$ .

D'autre part, si l'écoulement considéré est dans l'espace (x, y, z), autrement dit si la largeur du canal n'est pas très grande devant la hauteur de l'écoulement et si en plus la répartition de vitesse à la surface libre est quasi-uniforme, il résulte que l'équation (24) reste toujours valable. Il faut cependant remplacer les expressions de  $J, U, \beta$  par :

$$J = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho g h}; \quad U = \frac{S}{S}; \quad \beta = \frac{S}{S U^2} \quad \text{avec} \quad \bar{\tau}_w = \frac{\oint \tau_w dl}{\chi} \quad (25)$$

où  $\bar{\tau}_w$  est la moyenne de  $\tau_w$  sur le périmètre mouillé  $\chi$

En outre, l'équation de continuité (18) devrait être prise sous sa forme générale, i. e. :

$$h_{,t} + U S_{,x} + S U_{,x} = 0 \quad (26)$$

déduite à partir de l'équation (18) en remplaçant  $Q = S U$

Avant de quitter ce paragraphe, insistons sur le fait que le modèle de Saint-Venant n'est qu'une approximation d'ordre 0 ( $\varepsilon^2$ ) qui devrait être valable lorsque la profondeur de l'écoulement devient petite devant sa longueur (hypothèse d'eau peu profonde)

### I.3.2 Evaluation de la pente de frottement "J"

Nous reproduisons ici l'hypothèse classique qui consiste à supposer que la profondeur du fluide varie progressivement pour que chaque section de l'écoulement puisse être représentée par son équivalence en écoulement uniforme. Il sera donc convenable de se servir directement des résultats obtenus dans le chapitre précédent sur les écoulements uniformes. On vérifie alors que la pente de frottement dans une section quelconque avec un fluide de type Newtonien s'écrit comme suit :

$$J = \frac{\mu}{2\rho g} \alpha(S) \frac{U}{D_H^2} \quad (27)$$

Donc, le frottement visqueux varie comme  $U$  au lieu de  $U^2$  dans le cas turbulent, cela évidemment dans l'hypothèse où le glissement est nul.  $D_H = 4S/\chi$  est le diamètre hydraulique et  $\alpha(S)$  est un paramètre qui dépend de la forme de la section. Pour une section infiniment large  $\alpha = 96$ .

Par simplification, on suppose que la largeur du canal est assez large pour que la répartition de la vitesse dans l'axe central du canal soit parabolique, i.e

$$u = \frac{\rho g}{\mu} J \left[ hy - \frac{1}{2} y^2 \right] \quad (28)$$

On vérifie ainsi que le paramètre de forme  $\beta$ , défini par l'équation (23), égal à 1.2, et que

$$J = \frac{3\mu}{\rho g} \frac{U}{h^2} \quad (29)$$

Notons que la même loi a été déjà utilisée par Hunt (1994), Aguirre-PE (1995) et aussi par d'autres investigateurs. Aguirre-PE propose de la multiplier par un coefficient correcteur afin de tenir compte du caractère transitoire de l'écoulement.

### I.3.3 Applicabilité du modèle de Saint-Venant au problème de rupture de barrage

Nous particularisons maintenant ces équations au problème de rupture de barrage. Nous étudierons une condition d'écoulement simple où le fluide est initialement maintenu au repos derrière un mur vertical. Nous supposons que le canal est infiniment large et qu'il n'existe pas, initialement de fluide en aval du barrage (Figure 1a)

A  $t=0$ , le barrage s'effondre soudainement et complètement. En faisant abstraction de la possibilité d'apparition au voisinage du front d'onde d'un ressaut hydraulique (ou d'une onde de choc), le mouvement peut être alors étudié à partir des équations de Saint-Venant (24) et (20). D'autres limites d'application peuvent être également discutées, pour cela nous allons revoir, avec plus de détails, nos hypothèses de départ.

Pour commencer, nous avons supposé que l'écoulement est laminaire. En admettant que le critère établi en régime permanent et uniforme reste également valable dans le problème de rupture de barrage, i. e que l'écoulement est laminaire lorsque le nombre de Reynolds  $Re_h = (\rho U h) / \mu$  est inférieur à une valeur critique  $Re_c$  (d'environ 500). Il résulte en se basant sur la solution inertielle de Ritter que le régime d'écoulement est laminaire à l'abscisse du barrage lorsque :

$$H < H_c = \left( \frac{27 Re_c \mu}{8 \rho \sqrt{g}} \right)^{2/3} \quad \text{avec} \quad Re_c \approx 500 \quad (30)$$

Remarquons que c'est à l'abscisse de barrage que le nombre de Reynolds est le plus grand.

Prenons l'exemple d'un fluide peu visqueux caractérisé par  $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^{-3}$  et  $\mu = 0.89 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$  (l'eau à 20 °C). En remplaçant, il résulte que  $H_c \approx 6 \text{ mm}$ , donc c'est un cas différent de celui visé dans notre étude. Prenons maintenant un autre fluide plus visqueux caractérisé par  $\rho = 1406 \text{ Kg/m}^{-3}$  et  $\mu = 12 \text{ Pa.s}$  (solution de Glucose et de l'eau à 90% par exemple), il vient  $H_c \approx 2.8 \text{ m}$ . On remarque que ce deuxième exemple peut effectivement représenter une situation d'écoulement naturel. Notons que même si l'équation (30) n'est pas vérifiée, il devrait exister un instant où l'écoulement devient complètement laminaire.

Nous avons également supposé que la répartition de pression est hydrostatique, i.e que la formulation 1D de Saint-Venant est valable. Cette approximation dépend à la fois du paramètre  $\varepsilon$  et du nombre de Reynolds. D'une manière générale, on devrait avoir  $\varepsilon \ll 1$  et  $Re$  qui n'est pas très petit. Supposant que  $\varepsilon \approx H/x_f$  où  $x_f$  est la position du front d'onde (f comme front), il apparaît donc que les effets de  $\varepsilon$  seront maximaux dans les premiers instants après la rupture de barrage, mais ils devraient disparaître au cours du temps dès que la longueur de l'écoulement devient assez importante devant sa hauteur.

On a également supposé que l'influence de la tension superficielle est négligeable. Ces effets peuvent être caractérisés à partir de deux nombre adimensionnels : Le nombre de Weber "We" (rapport des forces inertielles aux forces de tension superficielle) lorsque le

régime d'écoulement est essentiellement inertiel, et le nombre capillaire " $Ca$ " (rapport des forces visqueuses aux forces de tension superficielle) si l'écoulement envisagé est visqueux. Dans ce problème de rupture de barrage, on définit ces deux nombre adimensionnels, comme suit :

$$We = \frac{\rho g H L_0}{\sigma} ; \quad Ca = \frac{\mu U_0}{\sigma} \quad (31)$$

où  $L_0 \approx x_f$  et  $U_0$  sont respectivement des références pour la longueur et les vitesses, et  $\sigma$  la tension superficielle. Dans la phase initiale de l'écoulement, le régime est essentiellement inertiel et c'est le nombre de Weber qui est le plus représentatif. Cependant, dans la phase finale, l'écoulement est visqueux et c'est le nombre  $Ca$  qui devient le plus représentatif. Dans ce dernier cas, on vérifie que les effets de la tension superficielle peuvent apparaître aux temps grands lorsque les vitesses d'écoulement deviennent assez faibles.

#### 1.4 Solution inertielle de Ritter

Lorsque le frottement est négligeable devant l'inertie, canal horizontal, rupture instantanée, et le fluide est initialement au repos dans le réservoir, la solution a été obtenue par Ritter (1892). Le front d'onde avance avec une vitesse constante égale à  $2\sqrt{gH}$ , tandis que l'onde négative (caractérisée par une hauteur égale à la profondeur initiale de l'écoulement " $H$ ") recule avec une vitesse constante  $\sqrt{gH}$ . Entre ces deux extrémités, la vitesse moyenne  $U$  et la profondeur  $h$  sont données par :

$$U = \frac{2}{3} \left( \frac{x}{t} + \sqrt{gH} \right) \quad (32)$$

$$\sqrt{gh} = \frac{1}{3} \left( 2\sqrt{gH} - \frac{x}{t} \right) \quad (33)$$

où  $x = 0$  correspond à l'emplacement du barrage.

Il faut cependant noter que ces relations sont valables seulement avant l'instant où l'onde négative atteint l'extrémité amont du réservoir, i.e  $t < L/\sqrt{gH}$  où  $L$  est la longueur initiale du réservoir. Ultérieurement, les conditions aux bords ne seront pas vérifiées.

Des propriétés intéressantes de l'écoulement peuvent être déduites à partir de ces relations. Par exemple, à l'endroit du barrage ( $x=0$ ,  $h = h_d$ ,  $U = U_d$  et  $q = q_d$ ), on a :

$$h_d = \frac{4}{9}H; \quad U_d = \frac{2}{3}\sqrt{gH}; \quad q_d = h_d U_d = \frac{8}{27}\sqrt{gH^3}; \quad Fr = Fr_d = 1 \quad (34)$$

La profondeur de l'écoulement est donc constante, il en est de même pour le débit. De plus, la vitesse de l'écoulement est égale à la vitesse critique définie par  $Fr = 1$ . Donc, l'endroit du barrage est une position critique de l'écoulement.

Il est aussi intéressant de signaler qu'ici la notion de propagation d'ondes est relative aux mouvements des hauteurs de fluide. Cela dit, une profondeur fixe va être, à un instant donné, dans une position, puis dans d'autres positions aux temps différents. Un observateur qui suit le mouvement de cette profondeur voit que celle-ci se déplace avec une vitesse constante égale à  $2\sqrt{gH} - 3\sqrt{gh}$ ; négatif pour  $x < 0$ , positif pour  $x > 0$ , et nulle pour  $x = 0$ . Le signe positif indique la direction de l'écoulement. Si les frottements ne sont pas négligeables, l'observateur voit la vitesse de propagation de cette profondeur qui diminue au cours du temps. Cette discussion permet de partager le courant en deux classes, pour lesquelles ce phénomène de propagation s'opère d'une manière différente, suivant que  $Fr$  est plus petit ou plus grand que l'unité. Si  $Fr < 1$  ( $x < 0$ ), les profondeurs se propagent inversement à l'écoulement, tandis que pour  $Fr > 1$  ( $x > 0$ ), les profondeurs propagent avec le courant d'eau. Pour  $Fr = 1$  ( $x = 0$ ), la profondeur est fixe. Il en résulte une analogie entre ce problème et le problème de propagation des ondes de surface. Si en un point d'un canal on projette subitement un certain volume d'eau, on peut donner naissance à une onde mobile qui parcourt le canal avec une vitesse égale à  $\sqrt{gh}$ . L'inégalité  $U > \sqrt{gh}$  ( $Fr < 1$ ) fait voir que la vitesse du courant est supérieure à la vitesse de propagation des ondes, de manière que celles-ci ne puissent pas remonter vers l'amont. Ce rapprochement n'est pas rigoureux, néanmoins, il présente quelque intérêt comme corrélation entre deux ordres de faits bien différents.

## 1.5 Théorie visqueuse

Comme nous allons voir dans la dernière partie de ce chapitre (I.10.3), nos résultats expérimentaux montrent qu'il peut y avoir un temps où l'écoulement devient complètement visqueux. Il convient dans ce cas de négliger dans l'équation (24) tous les termes en rapport avec l'inertie. Il résulte que le frottement visqueux est entièrement composé par la tangente de la surface libre, soit :

$$J = -h_{,x} \quad (35)$$

Il est bien de signaler que  $J$  est exactement égal à l'expression représentée par l'équation (29), car les termes inertiels peuvent être également négligés dans l'équation (17). Ainsi, l'équation dynamique ne fait pas apparaître le caractère transitoire de l'écoulement, et reste donc similaire à celle qui gouverne l'écoulement uniforme en régime laminaire. Compte tenu des

équations (29) et (35), on déduit l'expression du débit par unité de largeur du canal :

$$q = - \frac{\rho g}{12\mu} \frac{\partial h^4}{\partial x} \quad (36)$$

C'est en remplaçant dans l'équation de continuité qu'on fait apparaître le caractère transitoire de l'écoulement. On obtient une équation parabolique en fonction de  $h$  seulement, soit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\rho g}{12\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h^4) = 0 \quad (37)$$

Le même modèle d'écoulement a déjà été utilisé par quelques géophysiciens pour étudier les écoulements du magma terrestre (cf. Huppert 1982, 1986 et autres).

Dans le présent modèle, et dans la suite de nos développements, la conservation de la masse exprime que la quantité initiale du fluide reste constante au cours du temps. En effet, par intégration selon  $x$  de l'équation (20) on obtient la relation à vérifier impérativement :

$$\int_{-L}^{x_f} h dx = LH \quad (38)$$

### 1.5.1 Conditions initiales et conditions aux bords

En aval du barrage, le fond est sec et en amont, le fluide est en repos. La profondeur d'eau avant la rupture s'exprime donc :

$$h(x, t = 0^-) = H \quad \text{si} \quad -L \leq x \leq 0; \quad h(x, t = 0^-) = 0 \quad \text{ailleurs} \quad (39)$$

Cette condition initiale n'est pas continue en  $x = 0$  : La valeur à gauche est  $H$ , tandis que la valeur à droite est nulle. A  $t = 0$ , le barrage est instantanément et complètement détruit. La discontinuité de  $h$  apparaîtra à l'emplacement du barrage à  $t = 0^+$ .

Les conditions aux bords peuvent être différentes suivant que le réservoir est infiniment long ou l'étendue est limitée. Mais d'une manière générale, la condition en aval exprime que la profondeur est nulle, tandis que la condition en amont exprime que c'est le débit ou la vitesse moyenne qui est nul, soit :

$$h(x \rightarrow \infty (x = x_f), t) = 0 \quad (40)$$

et puisque  $h(x = -L, t) \neq 0$ , il vient d'après l' :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x \rightarrow -\infty (x = -L), t) = 0 \quad (41)$$

Si la solution est unique, ces conditions sont suffisantes pour résoudre ce problème.



Avant de commencer la résolution, signalons que l'équation (37) admet une solution à variables séparées ( $h(x,t) = X(x)T(t)$ ) qui ne vérifie pas les conditions aux bords du problème.

### 1.5.2 Solutions semblables

Pour plus de simplifications, on introduit les variables réduites suivantes :

$$\left( \hat{h}, \hat{x}, \hat{t}, \hat{x}_f \right) = \left( \frac{h}{H}, \frac{x}{L}, \frac{\rho g H^3}{12\mu L^2} t, \frac{x_f}{L} \right) \quad (42)$$

le signe ^ indique les paramètres adimensionnels. L'équation du mouvement (37) se réécrit donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} (\hat{h}^4) - \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} = 0 \quad (43)$$

Les conditions à respecter sont  $\hat{h}(\hat{x} = \hat{x}_f, \hat{t}) = 0$  et  $\hat{h}_{,\hat{x}}(\hat{x} = -1, \hat{t}) = 0$ . Compte tenu de l'équation (38), il convient également de vérifier que :

$$\int_{-1}^{\hat{x}_f} \hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) d\hat{x} = 1 \quad (44)$$

L'idée est de chercher des solutions affines de la forme :

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) = h_0(\hat{t}) X \left( \eta = \frac{\hat{x} - x_{**}(\hat{t})}{x_*(\hat{t})} \right) \quad (45)$$

En introduisant l'hypothèse (45) dans l'équation du mouvement (43), il vient :

$$\frac{\partial^2 X^4}{\partial \eta^2} + \frac{x_*(t),_t x_*(t)}{h_0(t)^3} \eta \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{x_{**}(t),_t x_*(t)}{h_0(t)^3} \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{h_0(t),_t x_*(t)^2}{h_0(t)^4} X = 0 \quad (46)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ F_1(\hat{t}) & F_2(\hat{t}) & F_3(\hat{t}) \end{array}$$

Pour que notre hypothèse soit valable, il faut que les trois fonction de temps ( $F_1(\hat{t})$ ,  $F_2(\hat{t})$  et  $F_3(\hat{t})$ ) intervenant dans cette dernière équation soient des constantes, il résulte que :

$$x_*(\hat{t}) = (A\hat{t} + B)^n \quad ; \quad x_{**}(\hat{t}) = C(A\hat{t} + B)^n + D \quad ; \quad h_0(\hat{t}) = E(A\hat{t} + B)^{\frac{2n-1}{3}} \quad (47)$$

Dans ces conditions, l'équation (46) devient :

$$\frac{d^2 X^4}{d\eta^2} + \frac{nA}{E^3} \left[ (\eta + C) \frac{dX}{d\eta} + \frac{1-2n}{3n} X \right] = 0 \quad (48)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  et  $n$  sont des constantes. Suivant les valeurs de ces constantes, on obtient une infinité de solutions qui vérifient parfaitement l'équation du mouvement, mais il faut aussi

examiner les conditions du problème. Pour cela, il nécessaire de soumettre les conditions physique (40), (41) et (44) à des conditions aux limites invariantes, i.e qui ne dépendent pas de  $\hat{t}$  ni de  $\hat{x}$ . Nous discuterons alors respectivement deux situations d'écoulement : Cas d'un réservoir limité et cas d'un réservoir infiniment long.

### Cas d'un réservoir limité sans tenir compte des contions initiales

Nous supposons ici que la solution ne peut dépendre que d'un groupement du type  $\eta = (\hat{x} + 1)/(\hat{x}_f(\hat{t}) + 1)$ , soit d'après l'analyse précédente  $x_*(t) = \hat{x}_f(\hat{t}) + 1$  et  $x_{**}(t) = 1$ , donc  $C = 0$  et  $D = 1$ . Cette propriété s'interprète physiquement en exprimant que la profondeur du fluide évolue avec une seule longueur de référence qui est la longueur totale de l'écoulement. D'autre part, on vérifie en respectant l'équation (44) que  $n = 1/5$  et afin de conserver dans tous les cas ( $\forall \hat{t}$ )  $X_2(0) = 1$ , on définit la fonction  $h_0(t)$  comme étant la profondeur du fluide au bord amont du canal, i.e  $\hat{h}(\hat{x} = -1, \hat{t})$ . En définitive, on obtient :

$$\hat{x}_f(\hat{t}) = \hat{c}_f [\hat{t} + \hat{c}_2]^{1/5} - 1 \quad (49)$$

et

$$\hat{h}(\hat{x} = -1, \hat{t}) = \frac{1}{a(\hat{x}_f(\hat{t}) + 1)} \quad (50)$$

avec

$$a = \int_0^1 X_2(\eta) d\eta \quad \text{et} \quad \hat{c}_f = \left( \frac{40}{3a^3} \right)^{1/5} \quad (51)$$

où  $\hat{c}_2 = B/A$  et  $\hat{c}_f = A^n$ . La fonction  $X(\eta) = X_2(\eta)$  est définie dans l'intervalle  $[0,1]$  et elle devrait obéir à l'équation différentielle ordinaire du deuxième ordre suivante :

$$\frac{3}{8} \frac{d^2}{d\eta^2} (X_2(\eta)^4) + \eta \frac{dX_2}{d\eta} + X_2(\eta) = 0 \quad (52)$$

Elle est formellement identique à l'équation (43). On l'intègre avec pour conditions aux limites:  $X_2(0) = 1$  et  $dX_2/d\eta = 0$  à  $\eta = 0$ . Compte tenu de ces conditions, il vient :

$$X_2(\eta) = (1 - \eta^2)^{1/3} \quad (53)$$

On remarque que la condition  $X_2(0) = 1$  est automatiquement vérifiée. Nous pouvons maintenant déduire  $a \approx 0.8411$  et  $\hat{c}_f \approx 1.8625$ . La fonction  $X_2(\eta)$  donne le profil de l'écoulement en fonction du temps. Elle est représentée graphiquement dans la Figure 2.

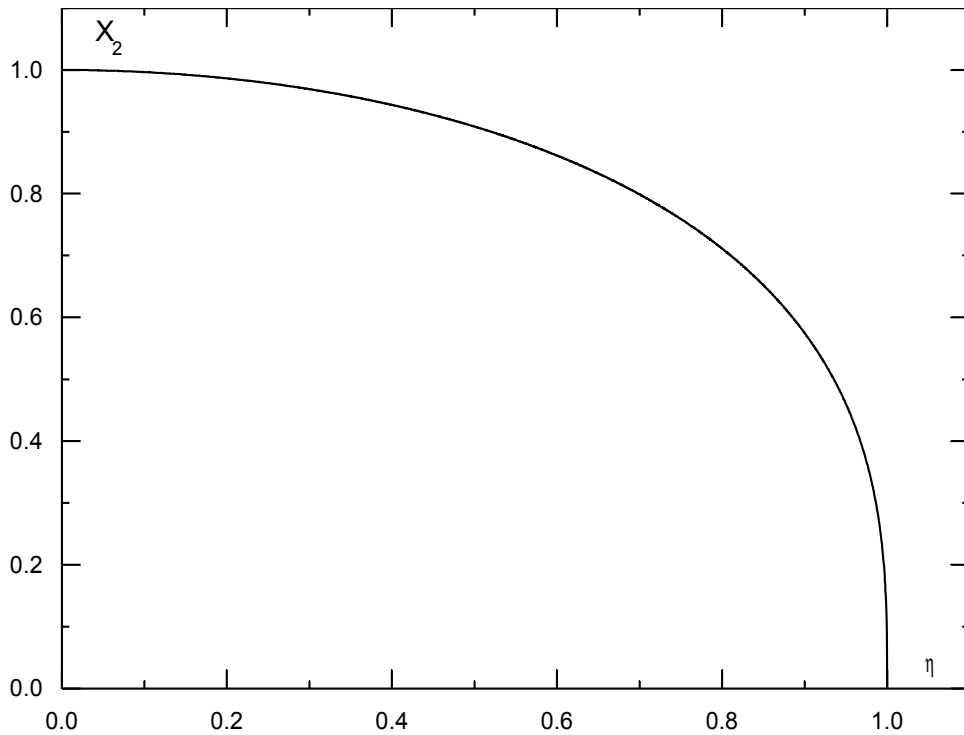


Figure 2: Solution analytique du profil de la surface libre ; régime visqueux ; temps grands ; réservoir limité; variables normalisées ; fond horizontal

On obtient donc une solution qui vérifie parfaitement l'équation du mouvement ainsi que tous les conditions aux limites du problème, mais il reste à examiner les conditions initiales. Si on fait  $\hat{x}_f(\hat{t} = 0) = 0$ , on déduit à partir de l'équation (49) la valeur de la constante  $\hat{c}_2 \approx 0.045$ . A cet instant, la profondeur du fluide au bord amont du canal peut être déduite à partir de l'équation (50), soit  $\hat{h}(\hat{x} = -1, \hat{t} = 0) \approx 1.189$ , qui est supérieure à la valeur admise  $1$ . Si on fait maintenant  $\hat{h}(\hat{x} = -1, \hat{t} = 0) = 1$ , alors  $\hat{x}_f(\hat{t} = 0) \approx 0.2$ . Par conséquent, cette solution est incapable de vérifier les conditions initiales de l'écoulement. En réalité, celle-ci n'est valable que pour  $\hat{x}_f(\hat{t}) \gg (1 - a)/a$  (c.a.d  $\hat{x}_f(\hat{t}) \gg 0.2$  lorsque le front d'onde dépasse environ 1/5 la largeur du canal) correspondant aux temps relativement grands.

### Cas d'un réservoir infiniment long

On aurait pu penser dès le départ qu'aux temps petits, le comportement de l'écoulement peut être considéré analogue au comportement d'un réservoir de très grande dimension de telle sorte que loin du barrage, le fluide peut être considéré au repos à la profondeur  $H$ . Par conséquent, la longueur initiale du réservoir ' $L$ ' ne peut pas avoir d'influence sur l'écoulement envisagé. On préfère alors exprimer les variables réduites sous la forme :

$$(\tilde{h}, \tilde{x}, \tilde{t}) = \left( \frac{h}{H}, \frac{x}{H}, \frac{\rho g H}{12\mu} t \right) \quad (54)$$

qui ne font pas intervenir la longueur initiale du réservoir. Le signe  $\sim$  a été choisi pour représenter les variables adimensionnelles de cette situation d'écoulement. L'équation (37) se réécrit donc, comme suit :

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} (\tilde{h}^4) - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = 0 \quad (55)$$

C'est une équation analogue à l'équation (43) en utilisant le signe  $\sim$  en place de  $\wedge$ . Comme le réservoir est supposé infiniment long, on a choisi de se placer à une abscisse prévue au départ d'être critique (correspondant à l'emplacement du barrage) et de chercher des solutions affines dont le rapport d'affinité égal aux rapport des positions du front d'onde, i.e  $\eta = \tilde{x} / \tilde{x}_f(\tilde{t})$ , soit  $x_* = \tilde{x}_f(\tilde{t})$  et  $x_{**} = 0$  ( $C = 0$  et  $D = 0$ ). Pour assurer la condition initiale de l'écoulement, il est avantageux de prendre  $h_0 = 1$  ( $E = 1$  et  $n = 1/2$ ). Compte tenu de l'équation(47), il résulte

$$\tilde{x}_f(\tilde{t}) = \tilde{c}_f (\tilde{t} - \tilde{c}_1)^{1/2} \quad (56)$$

où  $\tilde{c}_1 = B/A$  et  $\tilde{c}_f = A^n$ . La fonction  $X(\eta) = X_1(\eta)$  devrait se plier à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2}{d\eta^2} (X_1(\eta)^4) + \frac{1}{2} \tilde{c}_f^2 \eta \frac{d}{d\eta} (X_1(\eta)) = 0 \quad (57)$$

D'autre part, il est formellement possible de fixer  $\tilde{c}_f = 1$ , mais on devrait remplacer dans ce cas  $\tilde{x}_f(\tilde{t})$ , intervenant dans la définition de la variable  $\eta$ , par une fonction  $\tilde{x}_*(\tilde{t})$  qui varie comme  $\tilde{x}_f(\tilde{t})$ , soit par exemple  $\tilde{x}_*(\tilde{t}) = (\tilde{t} - \tilde{c}_1)^{1/2}$ . Ainsi, on peut résoudre l'équation (57) avec pour conditions aux limites :

$$X_1(\eta \rightarrow +\infty) = 0; \quad X_1(\eta \rightarrow -\infty) = 1 \quad (58)$$

Et déduire ensuite  $\tilde{c}_f$  qui correspond à  $X_1(\tilde{c}_f) = 0$ .

Malheureusement, cette équation n'est pas intégrable analytiquement. Néanmoins, on peut trouver une solution approchée à l'aide de développements en série autour de  $\eta = 1$ . Pour cela, il est avantageux d'introduire  $f = (8/3\tilde{c}_f^2)^3 X_1^3$  et  $p = 1 - \eta$ . L'équation (57) se réécrit donc :

$$3f \frac{d^2 f}{dp^2} + \left( \frac{df}{dp} \right)^2 + p \frac{df}{dp} - \frac{df}{dp} = 0 \quad (59)$$

avec  $f(0) = 0$ . En utilisant le développement de Taylor au voisinage de  $p=0$  en commençant par un terme proportionnel à  $p$ , et après substitution et identification terme à terme des puissances de  $p$ , on aboutit à :

$$f(p) \approx p - \frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{224}p^3 + \frac{3}{17920}p^4 + \frac{3}{32614400}p^5 - \frac{157}{260915200}p^6 - \frac{10107}{194329640960}p^7 + \dots \quad (60)$$

Il semble que cette série a un rayon de convergence inférieur à 7. Comme nous allons voir dans la suite, cela peut être suffisant pour caractériser le régime d'écoulement. En revenant maintenant aux variables de départ et en tenant compte seulement des quatre premiers termes de cette série, il vient :

$$X_1(\eta) \approx \left( \frac{3}{8} \tilde{c}_f^2 \right)^{1/3} \left[ (1-\eta) - \frac{1}{8}(1-\eta)^2 + \frac{1}{224}(1-\eta)^3 + \frac{3}{17920}(1-\eta)^4 + \dots \right]^{1/3} \quad (61)$$

qui montre qu'au voisinage du front, i.e  $\hat{x} \rightarrow \hat{x}_f$ , la hauteur varie comme  $(x_f - x)^{1/3}$ .

Pour évaluer l'inconnue  $\tilde{c}_f$ , nous avons préféré résoudre numériquement l'équation (57). Une difficulté d'intégration numérique est que des conditions limites interviennent à la fois en  $\eta \rightarrow \infty$  et  $\eta \rightarrow -\infty$ . Il est plus simple de n'avoir à tenir compte que des conditions à  $\eta = 0$ .

On remarque que si l'on fait le changement de variables  $\tilde{\eta} = \lambda \eta$  où  $\lambda = \tilde{c}_f / \sqrt{2X_1(0)^3}$  et en remplaçant  $\tilde{X}_1 = X_1(\eta) / X_1(0)$ , l'équation (57) devient :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{Q}}{d\tilde{\eta}} = \frac{\tilde{\eta}}{4\tilde{X}_1^3} \tilde{Q} \\ \frac{d\tilde{X}_1}{d\tilde{\eta}} = -\frac{\tilde{Q}}{4\tilde{X}_1^3} \end{cases} \quad (62)$$

où  $\tilde{Q}(\eta) = -(1/X_1(0)^4) dX_1^4 / d\eta$  qui représente physiquement le débit en variables normalisées. Cette équation est formellement identique à l'équation (57). On l'intègre avec pour conditions :

$$\tilde{Q}(0) = \int_0^{\infty} \tilde{X}_1 d\tilde{\eta} \quad ; \quad \tilde{X}_1(0) = 1 \quad (63)$$

On déduit ensuite  $X_1(0) = 1/\tilde{X}_1(\tilde{\eta} \rightarrow -\infty)$ , puis  $\lambda$  qui correspond à  $\tilde{X}_1(\tilde{\eta} = \lambda) = 0$ .

Connaissant ces deux valeurs, on peut alors calculer la valeur de la constante  $\tilde{c}_f$  qui définit la position du front d'onde.

Pour la résolution, nous pouvons utiliser le problème de Cauchy qui consiste à trouver une courbe solution du système (62) telle que pour  $\tilde{\eta}$  donné (appelé point régulier, dans notre cas

$\tilde{\eta} = 0$ ), on ait  $\tilde{X}_1$  et  $\tilde{Q}$ . Il apparaît cependant une difficulté puisque  $\tilde{Q}(0)$  est inconnu. La solution est de procéder à un calcul itératif. On divise l'intervalle de définition de  $\tilde{\eta}$  en deux sous-ensembles,  $[0, \tilde{\eta}_\infty]$  et  $[-\tilde{\eta}_\infty, 0]$  où  $\tilde{\eta}_\infty$  est une valeur prise assez grande. Le calcul s'effectuera en deux étapes : dans l'intervalle  $[0, \tilde{\eta}_\infty]$ , en suite dans l'intervalle  $[-\tilde{\eta}_\infty, 0]$ . On fixe une valeur initiale  $\tilde{Q}^{(1)}(0)$ . On résout alors le système (62) depuis  $\tilde{\eta} = 0$  jusqu'à  $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_\infty$ . On corrige ensuite la valeur initiale  $\tilde{Q}^{(1)}(0)$  à l'aide de l'intégrale intervenant dans l' et on répète ces étapes jusqu'à la convergence. Le problème est ainsi résolu dans l'intervalle  $[0, \tilde{\eta}_\infty]$ , on passe au domaine  $[-\tilde{\eta}_\infty, 0]$ . Etant donné la vraie valeur de  $\tilde{Q}(0)$ , le calcul dans ce domaine s'effectuera en une étape. Les dérivées intervenant dans le système (62) sont approchées par des différences dont on remplace  $d$  par  $\Delta$  où  $\Delta$  représente une différence entre deux valeurs proches. Pour évaluer l'intégrale intervenant dans l'équation (63), on a utilisé la méthode des trapèzes. On obtient ainsi la fonction  $\tilde{X}_1$  dans tout son domaine  $[-\tilde{\eta}_\infty, \tilde{\eta}_\infty]$ . Cette fonction fournit le profil de l'écoulement en fonction du temps. Elle est représentée graphiquement (Figure 3). On peut pas définir dans ce cas une véritable onde négative. Néanmoins, on peut définir une position arrière critique  $\tilde{x} = \tilde{x}_b(\tilde{t})$  telle que  $h$  soit égale à un certain pourcentage (par exemple 99%) de  $H$ . Ce cas est similaire au problème de couche limite à l'exception qu'ici il concerne la profondeur et dans l'autre problème, il concerne la vitesse, avec d'autres petites différences relatives aux valeurs des tangentes de ces deux fonctions. Compte tenu de cette définition de  $\tilde{x}_b$ , on obtient :

$$\tilde{x}_b(\hat{t}) = -5.376(\tilde{t} - \tilde{c}_1)^{1/2} \quad \text{pour } \tilde{h} = 99\% \quad (64)$$

Les valeurs de  $\tilde{h}_d$  et  $\tilde{c}_f$  sont trouvées égales à 0.6839 et 0.9848, respectivement où  $\tilde{h}_d = h_d / H = X_1(0)$  représente la profondeur du fluide à l'emplacement du barrage. Celle-ci est prédite, comme dans la solution inertielle de Ritter, indépendante du temps mais sa valeur est 54% plus grande. En remplaçant la valeur de  $\tilde{c}_f$  dans l'équation (61), la fonction  $X_1(\eta)$  est calculée puis tracée sur la . Seulement les quatre premiers termes de cette série ont été considérés. On remarque que l'accord est assez bon. Dans l'intervalle où  $X_1(\eta)$  varie nettement, i.e  $|\tilde{x}_b, \tilde{x}_f|$ , l'écart est inférieur à 0.7%. Dans l'intervalle  $]-\infty, \tilde{x}_b]$ , il convient de prendre  $X_1(\eta) \approx 1$

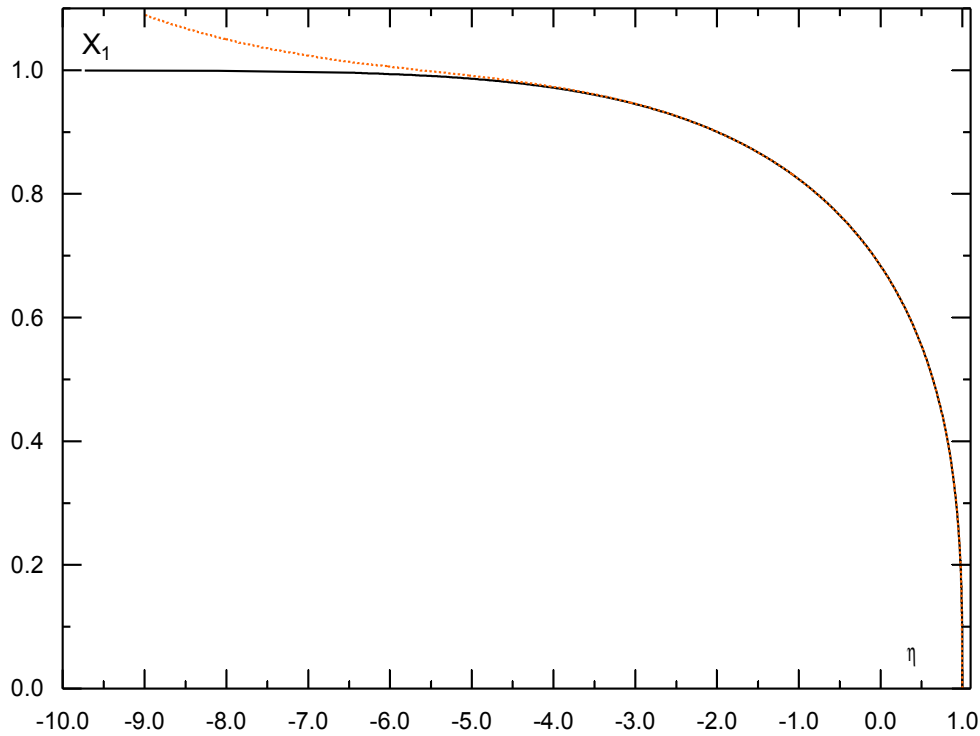


Figure 3: Solution numérique et la solution approchée du profil de la surface libre ; régime visqueux ; temps petits (ou réservoir infiniment grand) ; variables normalisées ; fond horizontal ——— Résultat numérique ..... Solution approchée

#### Remarque

Comme la condition initiale de l'écoulement est parfaitement vérifiée par la solution aux petits temps avec  $\tilde{c}_1 = 0$ , on aurait pu penser que la solution aux petits temps associée à la solution aux grands temps représentent la solution globale du problème, mais il n'en est rien. Le problème dans ce cas est physique. Si on se place à l'endroit du barrage, la profondeur du fluide est donc constante, mais la vitesse dépend du temps contrairement à la prédiction de la solution inertielle. Par conséquent, le nombre de Froude dépend également du temps, soit :

$$Fr(x = 0, t) = \frac{U(x = 0, t)}{\sqrt{gH(x = 0)}} \approx 0.487 \sqrt{\frac{\rho H^2}{\mu}} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

qui montre que  $Fr(x = 0, t \rightarrow 0) \rightarrow \infty$ , donc le nombre de Froude prend des valeurs indéfinies immédiatement après la rupture de barrage. Ce qui est n'est pas physique dans ce problème d'écoulement à surface libre. Ici, on doit avoir des valeurs finies, de plus, dans cet endroit, elles devraient être inférieures à l'unité compte tenu de la solution inertielle de Ritter. Dès lors, quelle que soit la viscosité du fluide, la solution visqueuse ne peut jamais être la solution globale du problème. Il faut naturellement considérer l'inertie dans les petits instants après la rupture de barrage ( $t \ll 0.237(\rho H^2 / \mu)$ ).

## I.6 Etude de la transition Inertie/Visqueux

La prépondérance des termes inertiels devant le terme visqueux conduit donc à un profil de l'écoulement convexe, tandis que la prépondérance du terme visqueux engendre une forme concave. D'autre part, on vient de voir qu'il est formellement impossible dans ce problème de rupture de barrage qu'on trouve une situation d'écoulement entièrement visqueuse ou, au contraire, entièrement inertielle. En pratique les deux mécanismes dépendent de l'échelle de temps. Il reste donc à savoir où et comment se fait le passage d'un régime à l'autre. Nous proposons dans cette section, l'étude de cette transition sans tenir compte de la tension superficielle. On définit un point particulier  $x = \zeta(t)$ . En amont de  $\zeta(t)$ , région dite supérieure, on considère que les effets du frottement visqueux sont petits, mais ils ne sont pas négligeables. En aval de  $\delta(t)$ , région dite frontale, on suppose que l'inertie est négligeable.

### I.6.1 Etude de la région supérieure

Dans cette région, nous supposons que l'écoulement est inertiel, et nous lui ajoutons une petite perturbation visqueuse. Dressler (1952) a déjà étudié ce cas, mais avec une loi de frottement turbulente en relation avec la formule empirique de Chézy. Dans le même esprit, Su et Barnes (1970) étendent cette analyse de Dressler aux canaux inclinés avec différentes formes (rectangulaire, triangulaire et parabolique). De notre côté, nous proposons d'élargir cette stratégie de travail au cas des écoulements laminaires où le terme de résistance est proportionnel à  $U/h^2$  au lieu de  $U^2/h$ .

On introduit la variable 'C' qui représente physiquement la vitesse de propagation d'une onde de surface dans une eau calme de hauteur h, soit :

$$C = \sqrt{gh} \quad (65)$$

Pour simplifier les écritures, un ensemble de variables adimensionnelles est choisi dont les références sont  $\sqrt{gH}$  pour les vitesses, H pour les abscisses et les hauteurs, et  $\sqrt{H/g}$  pour le temps. Notons que ces variables réduites sont identiques à celles déjà introduites dans ce problème par Sakkas & Strekoff (1973)

$$(C^*, U^*, x^*, t^*) = \left( \frac{C}{\sqrt{gH}}, \frac{U}{\sqrt{gH}}, \frac{x}{H}, \frac{t}{\sqrt{H/g}} \right) \quad (66)$$

Le signe \* indique les variables adimensionnelles.

Avec cette normalisation, les équations de Saint-Venant se réécrivent comme suit :



$$2 \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + 2U^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} + C^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} = 0 \quad (67)$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + 2C^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} = - \frac{3}{Re_H} \frac{U^*}{C^{*4}} \quad (68)$$

où le paramètre de forme  $\beta$  est pris, par simplification, égal à 1.  $Re_H$  est le nombre de Reynolds exprimé sous la forme :

$$Re_H = \frac{\rho H \sqrt{gH}}{\mu} \quad (69)$$

qui ne fait pas intervenir la longueur du réservoir contrairement au nombre de Reynolds qui sera défini dans la suite. En introduisant la variable  $\tau = (3/Re_H)t^*$ , et en supposant que  $\tau$  est un petit paramètre et qu'on peut faire un développement de  $U^*$  et  $C^*$  en puissance de ce petit paramètre, i.e :

$$U^*(x^*, t^*) = \sum_{i=0}^{\infty} U_i(x^*/t^*) \tau^i \quad (70)$$

$$C^*(x^*, t^*) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i(x^*/t^*) \tau^i \quad (71)$$

où  $i$  indique l'ordre de la solution. En posant ensuite la variable  $\eta$  égale à  $(c_0 - x^*/t^*)$  où  $c_0$  est une constante d'intégration, il vient à l'ordre 0 :

$$U_0(\eta) = c_0 - \frac{2}{3}\eta; \quad C_0(\eta) = \frac{1}{3}\eta \quad (72)$$

En rapportant l'hypothèse, indiquée par les équations (70) et (71), dans les équations du mouvement (67) et (68) et en identifiant terme à terme les puissances de  $\tau$ , on peut montrer que les termes  $U_i$  et  $C_i$  obéissent au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \eta \frac{dU_i(\eta)}{d\eta} + a_i U_i(\eta) = f_i(\eta) \\ C_i(\eta) = b_i U_i(\eta) + g_i(\eta) \end{cases} \quad (73)$$

où  $a_i$  et  $b_i$  sont des constantes.  $f_i(\eta)$  et  $g_i(\eta)$  sont en relation avec la variable  $\eta$ . Les expressions de ces fonctions sont à déterminer pour chaque  $i$ .

La solution de l'équation différentielle, intervenant dans le système d'équations (73), est de la forme :

$$U_i(\eta) = \eta^{-a_i} \int f_i(\eta) \eta^{a_i-1} d\eta + c_i \eta^{-a_i}$$

où les  $c_i$  sont des constantes d'intégration.

Pour  $i = 1$  (à l'ordre 1), on trouve :

$$U_1(\eta) = -\frac{324c_0}{11}\eta^{-4} + 21\eta^{-3} + \frac{10c_1}{7}\eta^{3/2}; \quad C_1(\eta) = \frac{81c_0}{22}\eta^{-4} - \frac{3}{2}\eta^{-3} + c_1\eta^{3/2} \quad (74)$$

La solution à l'ordre 2 est présentée est :

$$U_2(\eta) = -\frac{17496c_0^2}{121}\eta^{-9} + \frac{97686c_0}{121}\eta^{-8} - \frac{5103}{10}\eta^{-7} + \frac{571293c_0c_1}{2002}\eta^{-7/2} \quad (75)$$

$$- \frac{5103c_1}{22}\eta^{-5/2} + \frac{405}{49}c_1^2\eta^2 + \frac{8}{5}c_2\eta^3$$

$$C_2(\eta) = \frac{37179c_0^2}{242}\eta^{-9} - \frac{140697c_0}{484}\eta^{-8} + \frac{243}{2}\eta^{-7} - \frac{84321c_0c_1}{4004}\eta^{-7/2} \quad (76)$$

$$+ \frac{2349c_1}{308}\eta^{-5/2} + \frac{513}{98}c_1^2\eta^2 + c_2\eta^3$$

Si la vitesse d'onde négative est égale à la valeur de Ritter, i.e  $= -\sqrt{gH}$  ( $\eta = 3$ ), il vient  $c_0 = 2$ ,  $c_1 = -(7\sqrt{3})/1782$  et  $c_2 = -89/764478$ . Dans ce cas, la solution à l'ordre 0 est identique à celle de Ritter (équations (32) et (33)) et la variable  $\eta$  est définie dans l'intervalle  $]0,3[$ .

A l'ordre 1, pour  $\tau$  donné, l'approximation  $U^*$  est une fonction croissante jusqu'à une certaine valeur, puis elle décroît nettement. D'autre part, l'approximation  $C^*$  décroît avec  $\eta$ , puis elle augmente rapidement (Figure 4). Mais comme à l'abscisse du front d'onde, la hauteur devrait tomber à zéro (condition au bord qui devrait être respectée), ces résultats confirment donc l'invalidité de ces approximations dans la région frontale. A l'ordre 2, des conclusions semblables peuvent être tirées. Dans le domaine où ces approximations semblent être valables, les deux solutions (à l'ordre 1 et 2) donnent des résultats assez proches, donc on obtient une bonne convergence de la solution.

L'invalidité de cette approximation dans la région frontale est une conséquence logique. En effet, puisque la loi de frottement utilisée ici est inversement proportionnelle au carré de la profondeur du fluide (voir équation 29), le frottement tend vers l'infini à l'abscisse du front. D'autre part, l'accélération est prévue d'être finie, il résulte que le terme dû au frottement est assez grand dans la région frontale pour que les approximations utilisées (équations (70) et (71)) soient valables.

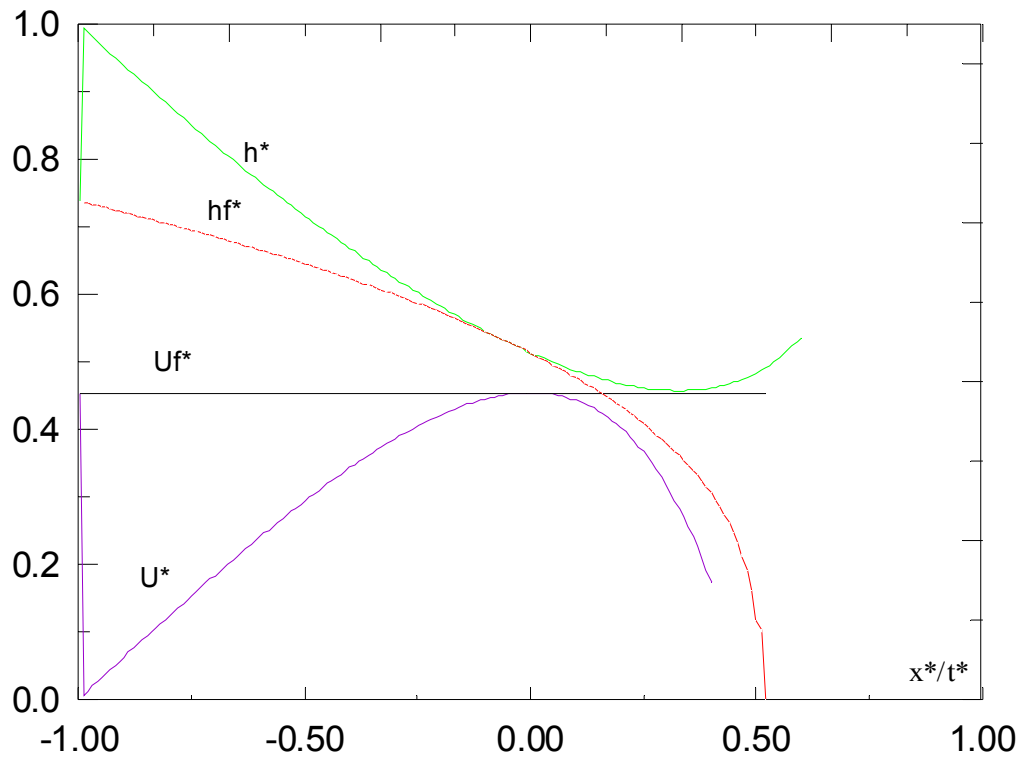


Figure 4 : Variation du profil d'écoulement et du profil de vitesse

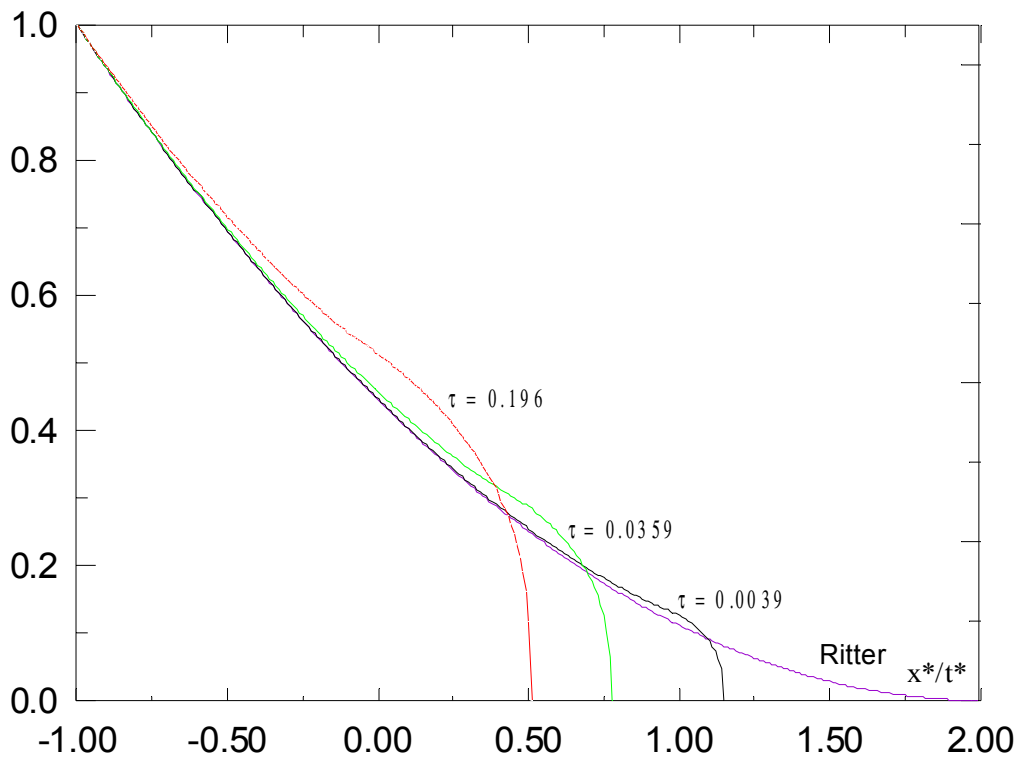


Figure 5 : Variation du profil d'écoulement en fonction du temps, phase à dominance inertiel

## 1.6.2 Etude de la région frontale

Pour pouvoir remédier à l'inconvénient résultant de l'analyse précédente, nous supposons pour  $x^* \rightarrow x_f^*$  que les grands termes  $2C^*(\partial C^*/\partial x^*)$  et  $-3U^*/(Re_H C^{*4})$  intervenant dans l' deviennent égaux. Cela revient à négliger dans la région frontale tous les termes d'inertie. Et puisque, pour  $t^* \rightarrow 0$ , on a  $U^*(x^*, t^*) \approx U_f^*(t^*)$ , il vient à l'ordre 0 :

$$C^*(x^*, t^*) \approx \left[ \frac{9}{Re_H} U_f^*(t^*) (x_f^* - x^*) \right]^{1/6}$$

L'idée est de supposer que dans la région frontale,  $U^*$  et  $C^*$  peuvent être exprimés en puissance de  $(x_f^* - x^*)$  ou le mieux, si on veut garder les mêmes normalisations que l'analyse précédente, en série de  $(\eta - \eta_f)$  où  $\eta_f$  représente l'abscisse du front d'onde en variable  $\eta$ , soit:

$$U^*(x^*, t^*) = U^*(\eta, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} U_i(\tau) \tau^i (\eta - \eta_f)^i \quad (77)$$

$$C^*(x^*, t^*) = C^*(\eta, \tau) = \left[ 3 \sum_{i=0}^{\infty} C_i(\tau) \tau^{i+1} (\eta - \eta_f)^{i+1} \right]^{1/6} \quad (78)$$

Remplaçons dans les équations du mouvement le couple de variables  $(x^*, t^*)$  par  $(\eta, \tau)$ , et reportons les développements (77) et (78) dans les équations résultantes. En identifiant ensuite terme à terme les puissances de  $(\eta - \eta_f)$ , il vient compte tenu de l'équation dynamique :

$$C_i(\tau) = \frac{1}{i+1} U_i(\tau) \quad (79)$$

Les fonctions  $U_i(\tau)$  sont à déterminer à l'aide de l'équation de continuité. Les six premiers termes sont :

$$\begin{aligned} U_0(\hat{t}) &= \frac{d\hat{x}_f}{d\hat{t}}; \quad U_1(\hat{t}) = \frac{1}{4U_0} \frac{dU_0}{d\hat{t}}; \quad U_2(\hat{t}) = \frac{1}{14U_0} \left( \frac{dU_1}{d\hat{t}} - 5U_1^2 \right) \\ U_3(\hat{t}) &= \frac{1}{10U_0} \left( \frac{1}{3} \frac{dU_2}{d\hat{t}} - 6U_1U_2 \right); \quad U_4(\hat{t}) = \frac{1}{13U_0} \left( \frac{1}{4} \frac{dU_3}{d\hat{t}} - \frac{29}{4} U_1U_3 - 3U_2^2 \right) \\ U_5(\hat{t}) &= \frac{1}{16U_0} \left( \frac{1}{5} \frac{dU_4}{d\hat{t}} - \frac{13}{2} U_2U_3 - \frac{43}{5} U_1U_4 \right) \end{aligned} \quad (80)$$

On peut vérifier que ces relations donnent la même équation (61) lorsque la vitesse du front

d'onde, i.e  $U_f^*$ , varie comme  $\tau^{-1/2}$ . En effet, ce cas est identique au problème étudié précédemment lorsque le régime d'écoulement est entièrement visqueux et le réservoir est infiniment grand.

### I.6.3 Evaluation de la vitesse du front

Pour évaluer la vitesse du front d'onde, Dressler (1952) suppose que celle-ci correspond à la valeur maximale atteinte par l'approximation  $U^*$  (70). Ceci revient à supposer que la répartition de vitesses est uniforme à partir de l'abscisse correspondant. Ce qui est tout à fait le cas pour  $\tau$  petit.

Il est possible d'apporter dans notre cas des améliorations en se servant à la fois des lois établies dans la région supérieure et des lois de la région frontale. Comme première approximation, nous retenons dans la région frontale et la région supérieur les approximations d'ordre 1 seulement. Il résulte :

$$U_f^* = U_\zeta^* \quad (81)$$

et

$$\eta_f = \eta_f - \frac{C_\zeta^{*6}}{3U_f^*\tau} \quad (82)$$

où  $C_\zeta^*$  et  $U_\zeta^*$  en variables réduites, donnent la profondeur et la vitesse moyenne à  $x = \zeta(t)$  (voir figure III- 16). Pour évaluer ces paramètres, on considère que celles-ci coïncident avec  $\partial U^* / \partial \eta = 0$ , correspondant au point à partir duquel l'approximation de la région supérieure devient incorrecte. Pour  $i=(1, 2)$ , cette condition donne une relation de la form). A  $i=1$ , on obtient :

$$\tau = \frac{2}{3} \left[ \frac{2592}{11} \eta_\zeta^{-5} - 63 \eta_\zeta^{-4} - \frac{5\sqrt{3}}{594} \eta_\zeta^{1/2} \right]^{-1} \quad (83)$$

C'est une équation implicite. Pour chaque  $\tau$ , on calcule  $\eta_\zeta$ . En remplaçant ensuite dans les équations (70) et (71), on déduit les valeurs de  $U_f^*$  et  $C_\zeta^*$ , respectivement, puis la valeur de la position du front à partir de l'équation (82).

D'autre part, des valeurs de  $\eta_\zeta$  pour différentes valeurs de  $\tau$  ont été calculées d'après l'équation (83) et ajustés à la formule suivante :

$$\eta_\zeta \approx \left( \frac{3888}{11} \right)^{1/5} (1 - 0.2 \tau^{1/5}) \tau^{1/5} \quad (84)$$

L'écart maximum est inférieur à 1%.

La position du front d'onde peut être également approchée d'après l'équation (82), avec un écart maximum de 4%, comme suit :

$$\eta_f \approx \left( \frac{3888}{11} \right)^{1/5} \left( 1 - \left( \frac{17}{48} \right)^6 \frac{648}{11} \right) \left( 1 - 0.361 \tau^{1/5} \right) \tau^{1/5} \quad (85)$$

On obtient pour  $\tau$  très petit :

$$U_f^*(\tau) \approx \begin{cases} 2 - \frac{5}{6} \left( \frac{3888}{11} \right)^{1/5} \tau^{1/5} & \text{à } i = 1 \text{ (solution d'ordre 1)} \\ 2 - \frac{10}{27} \sqrt{5} \left( \frac{972}{11\sqrt{5} - 22} \right)^{1/5} \tau^{1/5} & \text{à } i = 2 \text{ (solution d'ordre 2)} \end{cases} \quad (86)$$

La forme de ces expressions est la même que celle obtenue par Piau & Ayadi (voir Ayadi 1996) à partir d'une analyse différente, mais ici le coefficient numérique est égal à 2.695 pour  $i = 1$ , et à 2.709 pour  $i = 2$  au lieu de 2.485.

Ansi, le problème est totalement défini. On peut alors tracer séparément les deux solutions : celle de la région frontale, et celle de la région supérieure. La Figure 5 montre la prédiction théorique du profil de la surface libre, comportant la théorie de Ritter ( $\tau \rightarrow 0$ ) et notre solution. Les courbes sont représentées en variables adimensionnelles et pour  $\tau = 0.001, 0.1, 1$ . Remarquons comment en fonction de  $\tau$  la région visqueuse devient de plus en plus prépondérante.

## 1.7 Solution approchée globale : Cas horizontal

Notre solution approchée s'annonce comme suit : En faisant abstraction des effets de la tension superficielle et des effets de la non distribution hydrostatique de la pression, trois régimes d'écoulement principaux peuvent se manifester dans ce problème de rupture de barrage. Immédiatement après la rupture, l'écoulement est principalement inertiel, mais le frottement visqueux ne peut pas être complètement négligé. Le frottement visqueux se manifeste fortement au voisinage du front d'onde, et il devient de plus en plus dominant au cours du temps. Lorsque  $t$  atteint une valeur critique, ce terme visqueux devient prépondérant. Dans un premier temps, il se peut qu'aucune variation de la hauteur ne soit ressentie à l'extrémité amont du réservoir. Par conséquent, l'écoulement se comporte dans ce cas comme s'il s'agit d'un réservoir infiniment grand. Cependant, à partir d'un deuxième temps critique, la variation de la profondeur de l'écoulement, à  $x = -L$ , devient remarquable. Dans ce cas, l'écoulement tend vers un troisième et un dernier régime d'écoulement.

Ces trois situations sont déjà étudiées précédemment. L'objectif visé ici est de les regrouper dans une loi composée. Pour cela, il est nécessaire d'unifier les différentes normalisations utilisées. Nous choisirons de représenter l'ensemble de ces régimes d'écoulement en se référant au dernier régime. Les variables \* et ~ peuvent être alors remplacées par :

$$(x^*, h^*, t^*) = \left( \frac{L}{H} \hat{x}, \frac{L}{H} \hat{h}, \frac{12\mu L^2}{\rho H^{7/3} \sqrt{g}} \hat{t} \right) \quad (87)$$

et

$$(\tilde{x}, \tilde{h}, \tilde{t}) = \left( \frac{L}{H} \hat{x}, \frac{L}{H} \hat{h}, \frac{L^2}{H^2} \hat{t} \right) \quad (88)$$

On redéfinit maintenant le nombre de Reynolds 'Re' qui dépend dans ce cas de L (contrairement au nombre de Reynolds introduit précédemment) :

$$Re = \frac{\rho H \sqrt{gH}}{\mu} \frac{H}{L} \quad (89)$$

Il est identique au nombre de Reynolds de l'équation (11) dont la vitesse de référence est prise égale à  $\sqrt{gH}$ , donc la moitié de la vitesse du front d'onde lorsque le régime d'écoulement est inertiel. Il est certain que des transitions entre ces différents régimes d'écoulement existent. On espère cependant réduire l'écart en assurant la continuité de  $x_f$  le long de l'écoulement.

### Passage au premier régime visqueux

On suppose que le passage au régime visqueux se produit lorsque  $\zeta = 0$ , c'est à dire lorsque la région frontale atteint l'endroit du barrage. A partir du temps correspondant les formules établies dans la région supérieure ne seront pas valables. Soit  $\tau_c$  le temps réduit qui sépare le régime principalement inertiel du régime purement visqueux. D'après l'Eq III.1, on a  $\tau_c \approx 0.196$  ou bien  $\hat{t}_{c1}(Re) \approx 5.438 \cdot 10^{-3} Re^2$  où  $\hat{t}_{c1}$  est le temps qui sépare les deux régimes en variable  $\hat{t}$ . On déduit ainsi après changement de variables l'abscisse du front d'onde lors du passage, soit  $\hat{x}_{f1} \approx 0.033 Re$ . En remplaçant enfin  $\tilde{t} = \hat{t}_{c1}$  et  $\tilde{x}_f = \hat{x}_{f1}$  dans l'équation (56), on obtient l'expression approchée de  $\tilde{c}_1$  intervenant dans cette équation, soit  $\tilde{c}_1(Re) \approx 0.00432 Re^2$ .

### Passage au deuxième régime visqueux

Par deux analyses différentes, on peut estimer le passage au troisième régime d'écoulement. Dans la première analyse, on considère que ce cas se présente lorsque  $\hat{x}_b = -1$ .

Ainsi, en remplaçant dans l'équation (64) et après changement de variables, on obtient  $\hat{t}_{c2}(Re) \approx 0.035 + 0.00432 Re^2$  où  $\hat{t}_{c2}$  est le temps correspondant au passage. Dans la deuxième analyse, nous supposons que ce cas se manifeste lorsque le troisième régime d'écoulement devient valable, donc à partir du temps correspondant à  $\hat{x}_f(\hat{t}) = (1-a)/a \approx 0.189$ . Compte tenu de la continuité de  $\hat{x}_f$ , on déduit  $\hat{t}_{c2}(Re) \approx 0.037 + 0.00432 Re^2$ , puis l'expression de la constante  $\hat{c}_2$  intervenant dans l'équation (49), soit  $\hat{c}_2 = \hat{c}_2(Re) \approx 0.069 - 0.00432 Re^2$ . On vérifie que ces deux analyses donnent des résultats très proches.

### La forme globale de la solution approchée

Il ressort de cette analyse que la solution de ce problème est de la forme suivante :

$$\hat{h} = \hat{h}(\hat{x}, \hat{t}, Re); \quad \hat{U} = \hat{U}(\hat{x}, \hat{t}, Re); \quad \hat{x}_f = \hat{x}_f(\hat{t}, Re) \quad (90)$$

On peut également ajouter l'influence du paramètre  $\beta$ , du paramètre  $\varepsilon$  qui représente l'effet de la non distribution hydrostatique de la pression, et également du rapport de la largeur de l'écoulement sur sa hauteur qui traduit les effets des bords. Les expressions approchées de ces fonctions sont récapitulées en annexe et la représentation graphique de  $\hat{x}_f(\hat{t})$  est sur la . En échelle logarithmique, le changement global des différents régimes d'écoulement est remarquable. Notons également que la position du front d'onde diminue avec  $Re$ . L'écoulement prétendu purement visqueux se manifeste lorsque  $Re \rightarrow 0$ . Dans ce cas, on obtient une seule courbe regroupant à la fois le premier régime visqueux et le deuxième régime visqueux.

Enfin, il est nécessaire de signaler que les relations sont supposées valables seulement si le premier régime visqueux apparaît avant que l'onde négative de Ritter n'atteigne l'extrémité amont de l'écoulement, soit dans le cadre des approximations réalisées  $Re < 0.42$ . Pour des valeurs de  $Re$  plus importantes, on sait que la solution aux temps petits (équation (85)) reste toujours valable, il en est de même pour celle aux temps grands (équation (49)). Cependant, la transition entre ces deux solutions asymptotiques devient difficile à évaluer. On suggère dans ce cas, par simplification, de raccorder ces deux solutions directement à partir de leur point d'intersection.

## 1.8 Relations déduites

D'autres propriétés intéressantes de l'écoulement peuvent être déduites à partir de ces



relations. En cherchant par exemple dans quelles conditions la dérivée partielle de  $\hat{h}$  par rapport à  $\hat{t}$  est nulle, on obtient les lois suivantes :

Pour une station située en aval du barrage, la hauteur maximale du fluide ' $\hat{h}_{\max}(\hat{x})$ ', est donnée par :

$$\hat{h}_{\max}(\hat{x}) = \left(\frac{2}{5}\right)^{1/3} \left(\frac{3}{5}\right)^{1/2} \frac{1}{a} (\hat{x} + 1)^{-1} \quad (91)$$

Cette hauteur est atteinte à un temps  $\hat{t}_{\max}(\hat{x})$ , tel que :

$$\hat{t}_{\max}(\hat{x}) = \frac{1}{\hat{c}_f^5} \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{5}{2}} (\hat{x} + 1)^5 + \hat{t}_{c2} - \left(\frac{1}{\hat{c}_f a}\right)^5 \quad (92)$$

dont la position du front correspondante est :

$$(\hat{x}_f(\hat{t}_{\max}) + 1) = \left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} (\hat{x} + 1) \quad (93)$$

## 1.9 Effets de la pente

Ce qu'on vient de voir s'applique essentiellement à un canal horizontal. Si nous considérons un canal faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale, l'écoulement devient différent, car un terme supplémentaire dû à la force de gravité intervient dans les équations du mouvement. Sous cette forme générale, le problème est plus difficile à résoudre analytiquement. Néanmoins, on peut introduire quelques hypothèses supplémentaires et chercher ainsi des solutions approximatives.

### 1.9.1 Solution approchée aux temps petits

On peut utiliser pour cela les mêmes variables réduites que dans le cas horizontal (équation (66)) mais en remplaçant  $g$  par  $g \cos(\alpha)$ , cela dans toutes les formules et dans toutes les expressions. Ainsi, la variable  $C$  devient  $\sqrt{g \cos(\alpha) h}$ , et les références deviennent  $\sqrt{g \cos(\alpha) H}$  pour les vitesses,  $H$  pour les abscisses et les hauteurs, et puis  $\sqrt{H/(g \cos(\alpha))}$  pour les temps. Dans ces conditions, l'équation de continuité (67) reste valable, tandis que l'équation de quantité de mouvement devient :

$$\frac{\partial U^*}{\partial \hat{t}^*} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + 2C^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} = \text{tg}(\alpha) - \frac{3}{\text{Re}_H} \frac{U^*}{C^{*4}} \quad (94)$$

avec :

$$Re_H = \frac{\rho H \sqrt{g \cos(\alpha) H}}{\mu} \quad (95)$$

Nous considérons la condition initiale où le barrage est maintenu perpendiculaire à l'axe du canal (Figure 10b)

$$h^*(x^*, t^* = 0^-) = \begin{cases} tg(\alpha)x^* + 1 & Si \ x^* < 0 \\ 0 & Si \ x^* > 0 \end{cases}$$

Supposons, comme dans le cas horizontal, qu'il existe dans le réservoir une onde négative d'abscisse  $x^* = x_b^*(t^*)$ . Les conditions en amont qui expriment que la profondeur égale à la profondeur initiale et que la vitesse est nulle, peuvent se mettre alors sous la forme :

$$h^*(x^* = x_b^*(t^*), t^*) = tg(\alpha)x_b^* + 1 \quad et \quad U^*(x^* = x_b^*(t^*), t^*) = 0 \quad (96)$$

D'autre part, en utilisant une analyse théorique simple, US Army (1960-61) montrent que l'onde négative dans le réservoir se propage comme suit :

$$\frac{x_b^*(t^*)}{t^*} = -1 + \frac{1}{4}tg(\alpha)t^* \quad si \ t^* \leq \frac{2}{tg(\alpha)} \quad (97)$$

Cette relation a été validée expérimentalement par US Army (1960-61) en comptant le temps que mit cette onde pour atteindre l'extrémité amont du réservoir. En remplaçant maintenant l'équation (97) dans l'équation (96) on obtient les conditions en amont à vérifier impérativement :

$$C^*(x^* = x_b^*(t^*), t^*) = 1 - \frac{1}{2}tg(\alpha)t^* \quad ; \quad U^*(x^* = x_b^*(t^*), t^*) = 0 \quad (98)$$

Il convient également de vérifier la condition en aval qui exprime que la profondeur est nulle à l'abscisse du front d'onde.

### Résolution du problème dans la région supérieure

Comme précédemment, Su et Barnes (1970) ont étendu l'analyse de Dressler aux canaux inclinés. Ils considèrent une loi de frottement turbulente et cherchent une solution en développement sous une forme identique au cas horizontal équations (70) et (71) avec  $\eta = c_0 - x^*/t^*$ . En remplaçant dans les équations du mouvement, les auteurs donnent à l'ordre 0 l'équation (72) et à l'ordre 1, une expression en relation avec la loi de frottement utilisée (formule de Chézy). Pour exprimer la constante  $c_0$  et la deuxième constante d'intégration qui interviennent dans la solution d'ordre 1, ils supposent que la vitesse d'onde négative est égale à la valeur de Ritter. Cependant, compte tenu des résultats obtenus par US Army (1960-61), la vitesse de l'onde négative n'est pas égale à cette valeur (voir l'équation

(97)). En plus, cette solution est incapable de vérifier simultanément les conditions en amont représentées par l'équation (96).

On obtient cependant des résultats meilleurs en exprimant, compte tenu de la structure de l'équation (97), la variable  $\eta$  comme suit :

$$\eta = c_0 - \frac{x^*}{t^*} + \frac{1}{4}tg(\alpha) t^* \quad (99)$$

Comme dans le cas horizontal, on suppose qu'on peut faire un développement de  $U^*$  et  $C^*$  en puissance de  $\tau$ , i.e :

$$U^*(x^*, t^*) = U^*(\eta, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} U_i(\eta, \alpha) \tau^i \quad (100)$$

$$C^*(x^*, t^*) = C^*(\eta, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i(\eta, \alpha) \tau^i \quad (101)$$

Nous considérons exclusivement le cas laminaire, mais il faut cependant signaler que le travail de Su & Barnes (1970) relatif au cas turbulent peut être corrigé en utilisant la même idée. En rapportant maintenant l'hypothèse dans les équations du mouvement et en identifiant terme à terme les puissances de  $\tau$ , on obtient :

$$U_0(\eta, \alpha) = U_0(\eta, \alpha = 0); \quad C_0(\eta, \alpha) = C_0(\eta, \alpha = 0) \quad (102)$$

Et

$${}^2U_1(\eta, \alpha) = U_1(\eta, \alpha = 0) + \frac{5Re_H}{18}tg(\alpha); \quad C_1(\eta, \alpha) = C_1(\eta, \alpha = 0) + \frac{Re_H}{36}tg(\alpha) \quad (103)$$

où  $U_0(\eta, \alpha = 0)$ ,  $C_0(\eta, \alpha = 0)$ ,  $U_1(\eta, \alpha = 0)$  et  $C_1(\eta, \alpha = 0)$  sont les solutions correspondantes au cas horizontal (équation (74)), en utilisant dans ce cas l'expression la plus générale de  $\eta$ , i.e l'équation (99). Pour tenir compte des conditions aux limites représentées par l'équation (98), il faut aussi remplacer  $c_1$  intervenant dans l'équation (74) par :

$$c_1 = \frac{-7\sqrt{3}}{17820}(154 - 72c_0 + 55Re_H tg(\alpha)) \quad (104)$$

avec  $c_0 = 2$ .

On vérifie ainsi que les conditions au bord amont de l'écoulement (l'équation (96) ou (98)) sont simultanément vérifiées (vitesse et hauteur). Le cas horizontal étudié précédemment correspond à  $\alpha = 0$ . Cependant, comme dans le cas horizontal, cette solution trouve une limite d'application au voisinage du front d'onde où la profondeur de l'écoulement n'atteint jamais la valeur nulle. Cela est compréhensible car à cet endroit le terme visqueux est trop important pour que les approximations réalisées (100) et (101), soient valables. Il convient

donc de définir un point critique au-delà duquel, l'approximation de la région supérieure devient incorrecte. Comme dans le cas horizontal, la condition  $\partial U^* / \partial \eta = 0$  semble être convaincante. A partir du point correspondant ' $\eta_\zeta$ ', la vitesse est dans un premier temps quasi-constante, puis elle décroît nettement. On peut vérifier que la condition  $\partial U^* / \partial \eta = 0$  donne l'équation suivante :

$$\tau = \frac{2}{3} \left[ \frac{1296c_0}{11} \eta_\zeta^{-5} - 63\eta_\zeta^{-4} + \frac{15}{7} c_1 \eta_\zeta^{1/2} \right]^{-1} \quad (105)$$

Pour chaque valeur de  $\tau$ , on calcule compte tenu de cette équation l'abscisse  $\eta = \eta_\zeta$  dans laquelle la vitesse  $U^* = U_\zeta^*$  (équation (100)) est maximale ( $\partial U^* / \partial \eta = 0$ ). En remplaçant ensuite dans les développements (100) et (101), on déduit  $U_\zeta^*$  et  $C_\zeta^*$ , respectivement. Nous n'exposons pas ce calcul.

### Résolution du problème dans la région frontale

On considère dans cette région que le terme visqueux domine devant l'inertie. Si de plus, on se limite aux temps très petits où les vitesses d'écoulement peuvent être prises indépendantes de  $x^*$  (approximation à l'ordre 0), il reste dans l'équation (94) :

$$2C^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} = tg(\alpha) - \frac{3}{Re_H} \frac{U_\zeta^*(t^*)}{C^{*4}} \quad (106)$$

qui peut être résolue avec pour condition  $C^*(\eta = \eta_f, \tau) = 0$ , soit

$$\frac{C^{*2}}{A(\tau)} + \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1 - (C^{*2} / A(\tau))}{1 + (C^{*2} / A(\tau))} \right] = \frac{1}{A(\tau)} \frac{Re}{3} tg(\alpha) \tau (\eta_f - \eta) \quad \text{où } A(\tau) = \sqrt{\frac{3U_\zeta^*(t^*)}{Re tg(\alpha)}} \quad (107)$$

$\eta_f$  représente la position du front d'onde en variable  $\eta$ , et elle peut être déterminée avec la condition  $C^*(\eta = \eta_\zeta, \tau) = C_\zeta^*(\tau)$  :

$$\eta_f = \eta_\zeta - \frac{3A(\tau)}{Re tg(\alpha) \tau} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + (C_\zeta^{*2} / A(\tau))}{1 - (C_\zeta^{*2} / A(\tau))} \right) - \frac{C_\zeta^{*2}}{A(\tau)} \right] \quad (108)$$

Aux temps petits le problème est ainsi résolu. Il faut cependant signaler que pour des valeurs  $Re_H$  et  $\alpha$  données, il existe un temps (noté  $\tau_c$ ) à partir duquel ces approximations perdent de leur efficacité. D'une manière générale,  $\tau_c$  diminue avec le nombre de Reynolds et la pente du

canal  $\alpha$ . L'illustration graphique de cette solution est sur la Figure 6 qui représente l'évolution du profil de la surface libre au cours du temps, cela pour  $\alpha = 10^\circ$  et  $Re = 10$ .

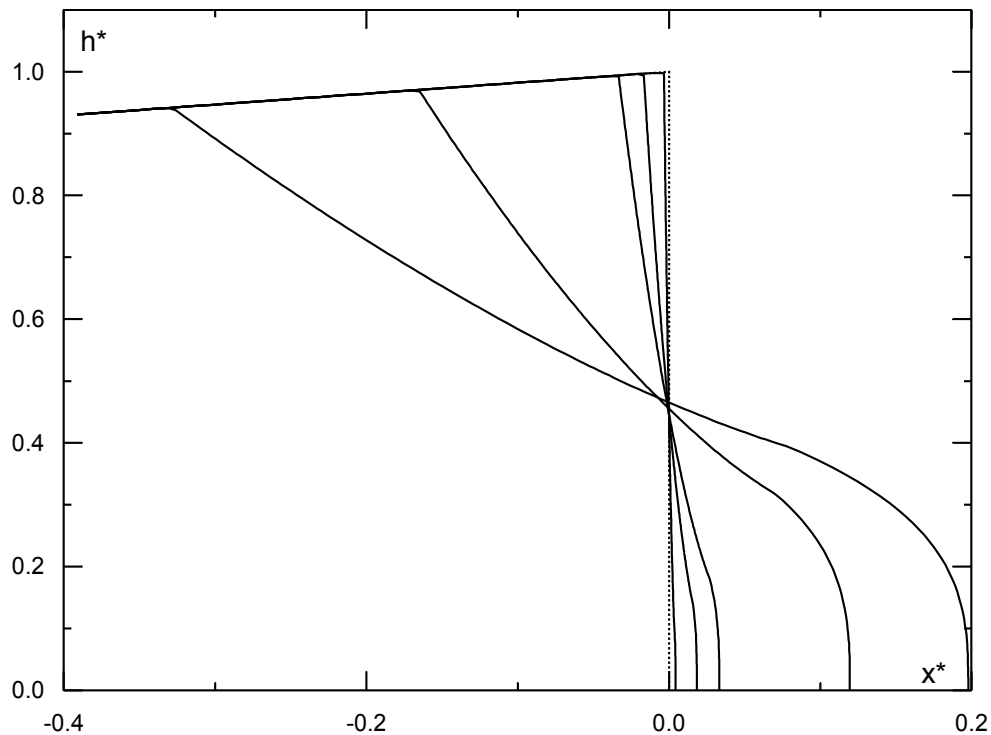


Figure 6 : Profil de l'écoulement dans la phase initiale de l'écoulement ( $Re_H = 100$ ) ; fond incliné ( $\alpha = 10^\circ$ ) ; variables adimensionnelles  $\tau = 0, 0.001, 0.005 \dots 0.1$ .

La Figure 7 montre la variation de la vitesse maximale  $U_{\max}^*$  (calculée en utilisant l'approximation de la région supérieure =  $U_\zeta^*$ ) en fonction de  $\tau$ , cela pour différentes pente du canal. On remarque aux temps petits, que la vitesse maximale (approximativement égale à la vitesse du front d'onde) n'est pas très sensible à la variation de la pente. Aux temps plus grands, on obtient une vitesse maximale qui augmente nettement avec la pente.

La Figure 8 représente la variation de la vitesse en fonction de  $\tau$  à l'endroit du barrage. Ici encore la vitesse égale à la valeur de Ritter immédiatement après la rupture, puis elle diminue au cours du temps. La Figure 9 montre la variation du nombre de Froude à l'emplacement du barrage en fonction du temps. L'ensemble de ces figures l'invalidité de cette solution à partir d'un certain temps (fonction du nombre de Reynolds et la pente du canal). Il faut naturellement considérer dans ce cas la prépondérance du frottement devant l'inertie.

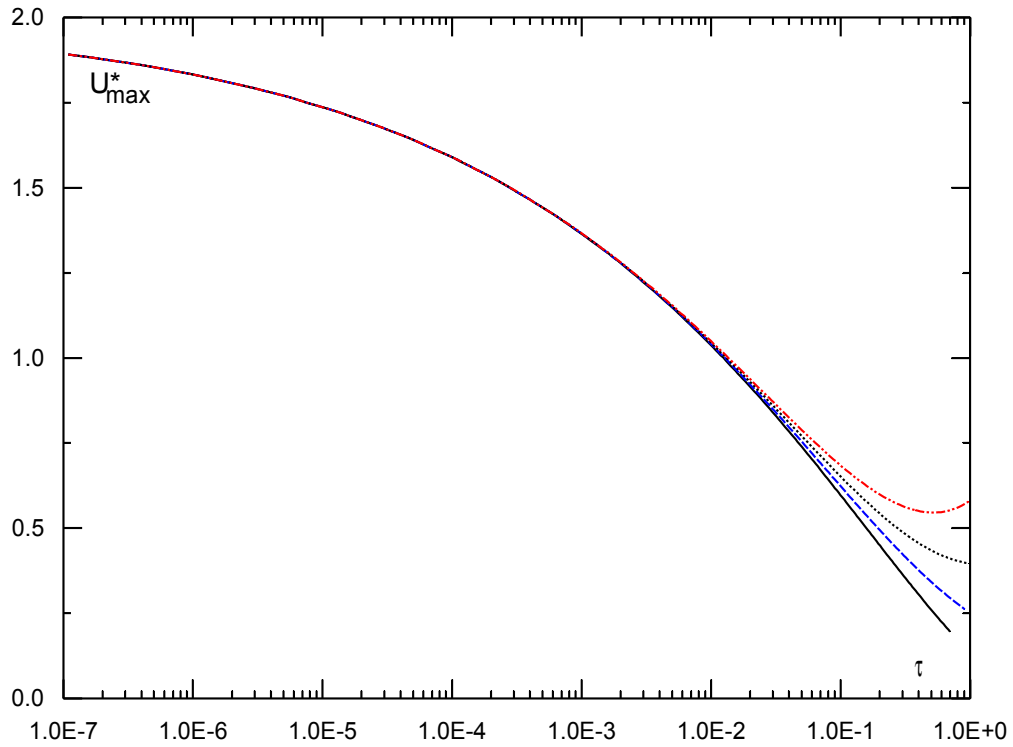


Figure 7 : Variation de la vitesse maximale dans la phase initiale de l'écoulement ( $Re_H = 10$ ) ; fond incliné ( $\alpha = 0,10,20,30^\circ$ ) ; variables adimensionnelles, —  $\alpha = 0^\circ$

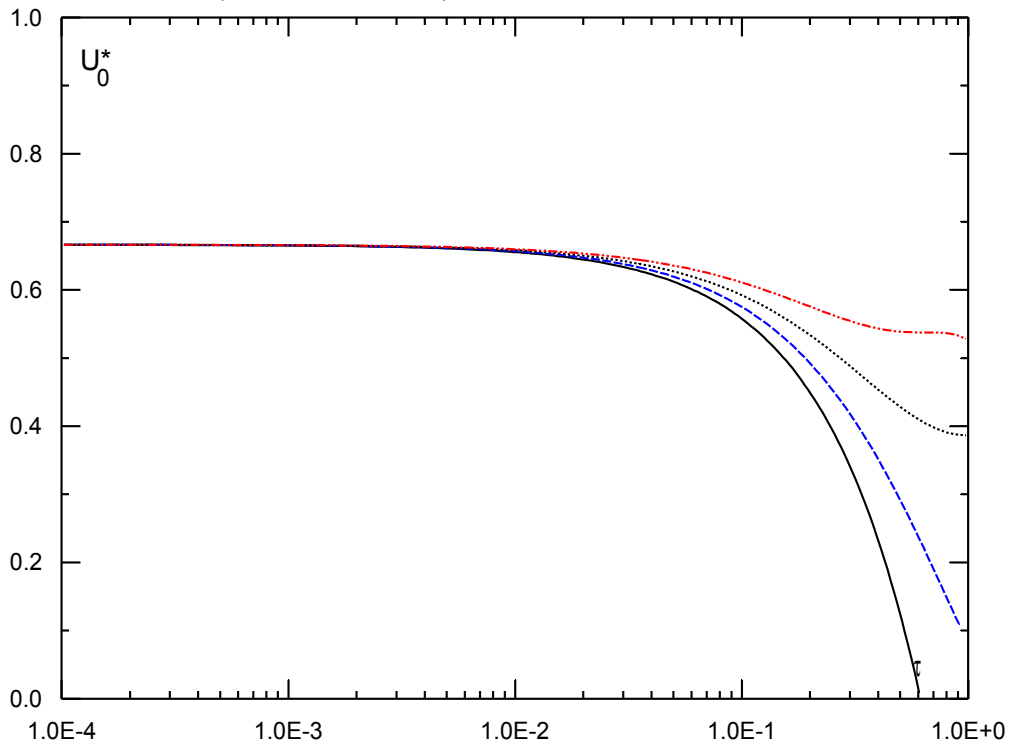


Figure 8 : Variation de la vitesse à l'endroit du barrage dans la phase initiale de l'écoulement ( $Re_H = 10$ ) ; fond incliné ( $\alpha = 0,10,20,30^\circ$ ) ; variables adimensionnelles.

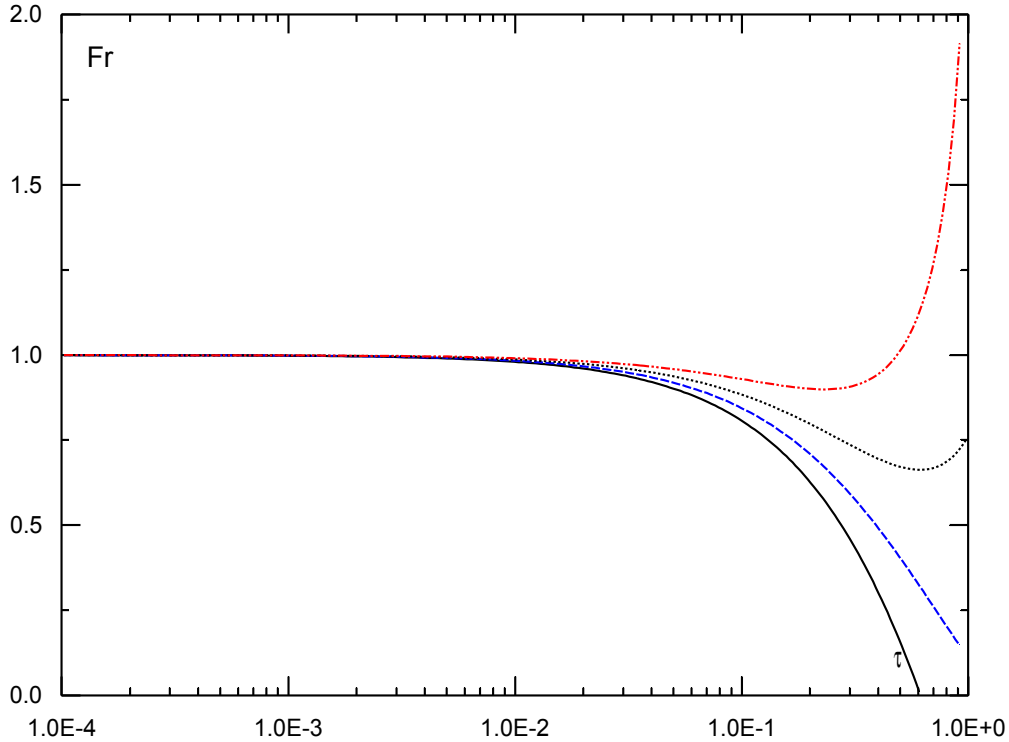


Figure 9 : Variation du nombre de Froude à l'endroit du barrage dans la phase initiale de l'écoulement ( $Re_H = 10$ ) ; fond incliné ( $\alpha = 0, 10, 20, 30^\circ$ ) ; variables adimensionnelles, —  $\alpha = 0^\circ$

### I.9.2 Modèle visqueux : Canal incliné

En négligeant les termes d'inertie intervenant dans l'équation du mouvement (24), il reste :

$$\cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} = (\sin(\alpha) - J) \quad (109)$$

qui exprime l'équilibre de trois types de forces ; la pression, la gravité, et le frottement visqueux. En introduisant la loi de frottement représentée par l'équation (29) qui reste également valable dans ce cas, il vient :

$$q = Uh = \frac{\rho g}{12\mu} \left( 4\sin(\alpha)h^3 - \cos(\alpha) \frac{\partial h^4}{\partial x} \right) \quad (110)$$

Compte tenu de l'équation de continuité, on aboutit au modèle visqueux suivant :

$$\cos(\alpha) \frac{\partial^2 h^4}{\partial x^2} - 4\sin(\alpha) \frac{\partial h^3}{\partial x} - \frac{12\mu}{\rho g} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (111)$$

qui se réduit à l'équation (37) dans le cas particulier où  $\alpha = 0$  (canal horizontal). On vérifie qu'un terme supplémentaire de convection apparaît dans ce problème.

### I.9.3 Conditions initiales et conditions aux bords

Lorsque le fluide est initialement au repos dans le réservoir et le canal est incliné, on peut définir deux conditions initiales de l'écoulement suivant que la surface libre touche ou ne

touche pas le fond amont du canal (Figure 10b et c). Ces différentes conditions initiales peuvent être distinguées en fonction du paramètre adimensionnel  $\hat{L}$  :

$$\hat{L} = \frac{L}{H} \operatorname{tg}(\alpha) \quad \text{avec} \quad \hat{L} \in [0,1] \quad (112)$$

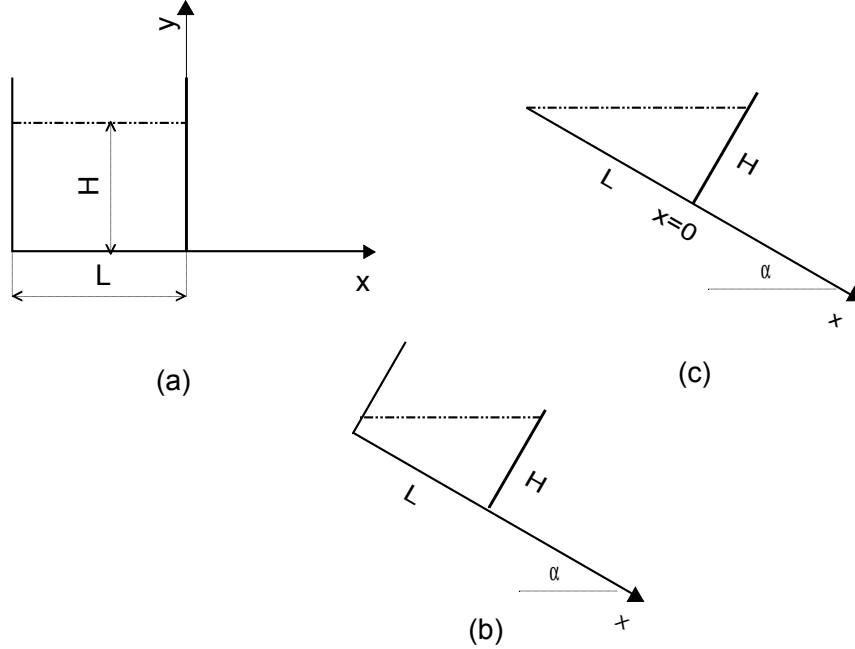


Figure 10 : Différentes conditions initiales de l'écoulement ; fond aval sec, fluide initialement en repos dans le réservoir

La condition initiale est dite à hauteur nulle lorsque  $\hat{L} = 1$ . Si  $0 < \hat{L} < 1$ , la condition initiale est désignée comme étant la condition à hauteur non nulle. Le cas horizontal se présente lorsque  $\hat{L} = 0$ . En normalisant l'abscisse par L et les hauteurs par H, il vient  $\forall \hat{L}$  :

$$\hat{h}(\hat{x}, t = 0^-) = \begin{cases} \hat{L}\hat{x} + 1 & \text{Si } \hat{x} < 0 \\ 0 & \text{Si } \hat{x} > 0 \end{cases} \quad (113)$$

D'autre part, puisque le fond aval est sec, la profondeur de l'écoulement y est nulle, i.e  $\hat{h}(\hat{x} = \hat{x}_f, t) = 0$ . La condition à l'amont est différente suivant les cas cités plus haut. D'une manière générale, elle exprime que le débit est nul à cet endroit. Donc,  $\hat{h}(\hat{x} = -1, t) = 0$  pour la condition à hauteur nulle, et  $\hat{h}_{,x}(\hat{x} = -1, t) = \hat{L}$  pour les deux autres conditions initiales.

#### I.9.4 Normalisation et forme globale de la solution

On normalise dans ce cas les variables physiques de l'écoulement par :

$$\left( \hat{h}, \hat{x}, \hat{t}, \hat{x}_f \right) = \left( \frac{h}{H}, \frac{x}{L}, \frac{t}{T}, \frac{x_f}{L} \right) \quad \text{avec} \quad T = \frac{12\mu L^2}{\rho g \cos(\alpha) H^3} \quad (114)$$

C'est-à-dire que l'on procède comme dans le cas horizontal (équation (42)) en changeant juste



g par  $g \cos(\alpha)$ . Compte tenu de cette normalisation, l'équation (111) devient :

$$\frac{\partial^2 \hat{h}^4}{\partial \hat{x}^2} - 4\hat{L} \frac{\partial \hat{h}^3}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} = 0 \quad (115)$$

Ainsi, en négligeant l'histoire inertielle de l'écoulement la solution du problème devrait avoir la forme suivante :

$$\hat{h} = \hat{h}(\hat{x}, \hat{t}, \hat{L}); \quad \hat{x}_f = \hat{x}_f(\hat{t}, \hat{L}) \quad (116)$$

Donc, le seul paramètre de l'écoulement est  $\hat{L}$ . Ce résultat est d'une importance primordiale car il permet d'aborder l'étude expérimentale en fonction du paramètre  $\hat{L}$  seulement. Ainsi, avec la condition à hauteur nulle ( $\hat{L} = 1$ ), l'écoulement ne peut dépendre que du couple  $(\hat{x}, \hat{t})$ , cela évidemment dans l'hypothèse où l'inertie est négligeable, i. e  $Re \rightarrow 0$ .

### 1.9.5 Approximation d'onde cinématique, solution interne

La solution asymptotique introduite par Hunt (1994) correspond à l'ordre 0 ( $\varepsilon$ ) du système d'équations (12) et (13), qui revient à négliger tous les termes intervenant dans ces équations sauf la pente du canal et le frottement visqueux, i.e  $J \approx \sin(\alpha)$ . Hunt a précisé que sa solution n'était raisonnable que lorsque le front d'onde de rupture de barrage parcourait une distance supérieure à 4 fois la longueur du réservoir. La condition initiale utilisée par l'auteur correspond à la condition à hauteur nulle. Nous généralisons alors cette approximation au cas de la condition à hauteur non nulle. Nous supposons  $\hat{L} \gg 0$  et que la pente de la surface libre est très inférieure à  $\hat{L}$  (solution valable à l'ordre 0 ( $\varepsilon$ )). Les vitesses seront adimensionnalisées par  $L/T$ .

Compte tenu de cette approximation, l'équation (110) se réduit à  $\hat{U} = 4\hat{L}\hat{h}^2$ . En désignant  $\hat{U}_{Fk}(\hat{t})$  comme étant la vitesse du front d'onde cinématique et  $\hat{h}_{Fk}(\hat{t})$  la hauteur correspondante, la relation reliant ces deux fonctions du temps est donc  $\hat{U}_{Fk} = 4\hat{L}\hat{h}_{Fk}^2$ .

D'autre part, l'équation de continuité se réduit à :

$$12\hat{L}\hat{h}^2 \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} = 0 \quad (117)$$

Il est possible de trouver la solution par l'intermédiaire des courbes caractéristiques, on obtient :

$$\hat{x} = 12\hat{L}\hat{h}^2\hat{t} + C(\hat{h}) \quad (118)$$

où  $C(\hat{h})$  est une fonction de  $\hat{h}$  qui dépend de la condition initiale de l'écoulement. Nous

limitons ici notre analyse aux temps grands où la profondeur du fluide atteint une valeur quasi-nulle au bord amont du canal. Il est raisonnable dans ce cas de modéliser le réservoir par un point ponctuel, soit  $C(\hat{h}) = -1$ . En remplaçant, il vient :

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) \approx \left( \frac{\hat{x} + 1}{12\hat{L}\hat{t}} \right)^{1/2} \quad (119)$$

L'abscisse du front d'onde cinématique peut être obtenue en assurant, à tout moment, la conservation de la masse initiale du fluide, il résulte :

$$\hat{x}_{Fk}(\hat{t}) \approx \left( \frac{27}{4} \hat{L}(2 - \hat{L})^2 \right)^{1/3} \hat{t}^{1/3} - 1 \quad (120)$$

En remplaçant dans l'équation (118), on déduit la profondeur d'onde cinématique, soit :

$$\hat{h}_{Fk}(\hat{t}) = \left( \frac{2 - \hat{L}}{16\hat{L}\hat{t}} \right)^{1/3} \quad (121)$$

### 1.9.6 Solution près du front : Solution externe

La solution interne est supposée valable aux temps grands et partout sauf au voisinage du front où la pente de la surface libre devient grande. Hunt (1994), propose alors une deuxième approximation. Il suppose que la vitesse au voisinage du front est quasi uniforme. Cette approche a été déduite à partir d'une analyse d'ordre de grandeur établie sur l'équation de conservation de la masse. Ainsi, en remplaçant  $\hat{U} = \hat{U}_{Fk} = 4\hat{L}\hat{h}_{Fk}^2$  et en faisant le changement de variable  $\hat{\xi} = \hat{x} - \hat{x}_{Fk}$ , l'équation (110) se réécrit après l'avoir normalisée, comme suit :

$$\hat{L} \left( 1 - \frac{\hat{h}_{Fk}^2}{\hat{h}^2} \right) = \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{\xi}} \quad (122)$$

On l'intègre avec pour condition (se référer à Figure 11) :

$$\int_{-\infty}^0 (\hat{h}_s(\hat{t}) - \hat{h}) d\hat{\xi} = \int_0^{\hat{\xi}_f(\hat{t})} \hat{h} d\hat{\xi} \quad \text{où} \quad \hat{h}(\hat{\xi} = \hat{\xi}_f(\hat{t}), \hat{t}) = 0 \quad (123)$$

Compte tenu de ces conditions, la solution de l'équation (122) est :

$$\hat{L}(\hat{x} - \hat{x}_{Fk}(\hat{t})) = \hat{h} + \frac{\hat{h}_{Fk}(\hat{t})}{2} \text{Ln} \left( \frac{\hat{h}_{Fk}(\hat{t}) - \hat{h}}{\hat{h}_{Fk}(\hat{t}) + \hat{h}} \right) + [\text{Ln}(4) - 1] \frac{\hat{h}_{Fk}(\hat{t})}{2} \quad (124)$$

On peut déduire d'ici l'abscisse du front d'onde qui correspond à  $\hat{h}(\hat{x} = \hat{x}_f(\hat{t}), \hat{t}) = 0$ , soit :

$$\hat{x}_f \approx \hat{x}_{Fk}(\hat{t}) + [\text{Ln}(4) - 1] \frac{\hat{h}_{Fk}(\hat{t})}{2\hat{L}} \quad (125)$$

A l'aide de développement limite autour de  $\hat{h} = 0$ , l'équation (124) peut être approchée à l'ordre 0 ( $\hat{h}^4$ ), comme suit :

$$\hat{h} \approx \left[ 3\hat{h}_{Fk}^2 \hat{L}(\hat{x}_f - \hat{x}) \right]^{1/3} \quad (126)$$

Cette relation montre qu'au voisinage du front d'onde, la profondeur du fluide varie comme s'il s'agissait d'un canal horizontal.

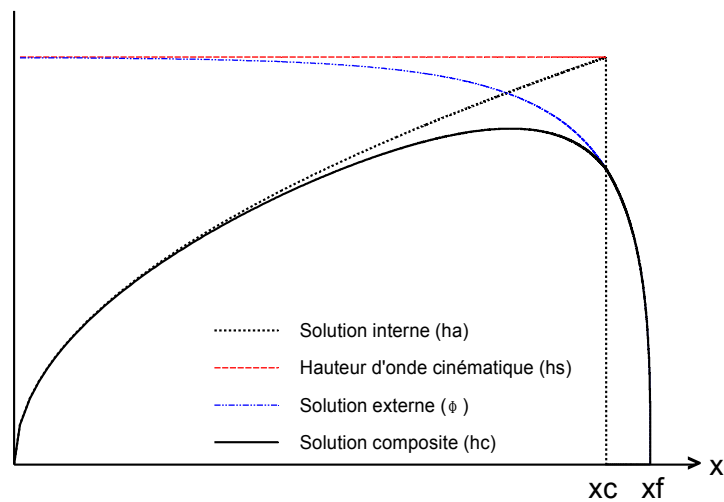


Figure 11 : Représentation graphique de la solution composite proposée par Hunt ; fond incliné ; condition initiale à hauteur nulle

### 1.9.7 Solution composite

Le principe de raccordement des approximations interne et externe repose sur l'idée que, si elles sont correctes, ces approximations font partie d'une solution plus générale valable dans tout le domaine, mais qui se ramène aux solutions approchées dans les régions interne et externe. Cette technique a été largement utilisée dans le problème de couche limite afin de raccorder la solution interne, au voisinage de la paroi (couche limite laminaire), à la solution externe, loin de la paroi où l'écoulement est supposé pleinement turbulent. Donc, Hunt a utilisé la même stratégie et propose compte tenu de la condition prise précédemment (équation (123)) et les autres conditions du problème :

$$\hat{h} \approx \hat{h}_c = \begin{cases} \hat{h}_i + \hat{h}_e - \hat{h}_{Fk} & \hat{\xi} \leq 0 \\ \hat{h}_e & \hat{\xi} \geq 0 \end{cases} \quad (127)$$

où  $\hat{h} = \hat{h}_e$  est la solution externe représentée par l'équation (124) et  $\hat{h} = \hat{h}_i$  est la solution interne représentée par l'équation (119). On peut vérifier que le problème est ainsi défini. Le cas particulier traité par Hunt correspond à  $\hat{L} = 1$ .

### I.9.8 Solution approchée globale : Cas incliné et horizontal

Lorsque le canal est incliné, nous avons montré que dans la phase initiale (juste après la rupture de barrage), la pente du canal n'a pratiquement aucune influence sur l'évolution du front d'onde. Et on vient de voir qu'aux temps grands, le frottement visqueux est entièrement compensé par la pente du canal. Comme solution approchée globale de ce problème, nous proposons de tracer, d'une part la solution correspondant à  $\hat{L} = 0$  (canal horizontal) mais en remplaçant  $g$  par  $g \cos(\alpha)$ , d'autre part la solution asymptotique en relation avec l'hypothèse d'onde cinématique, et puis de raccorder les deux à partir de leur point d'intersection. On retrouve ainsi le cas horizontal pour  $\alpha = 0$ .

Après cette étude théorique, qui est inspirée en premier lieu de nos résultats expérimentaux et en deuxième lieu des études déjà réalisées dans la littérature, nous allons maintenant comparer les prédictions aux mesures. Mais auparavant, signalons que des améliorations peuvent être apportées à nos relations analytiques, notamment en ce qui concerne les transitions entre les différents régimes d'écoulements et l'influence de la longueur finie du réservoir dans le régime inertiel. Le mieux dans ce cas, sera d'utiliser des moyens numériques, car à l'heure actuelle très peu de méthodes analytiques existent.

## I.10 Etude expérimentale et discussions

Notre objectif initial est de simuler les écoulements de laves torrentielles qui se produisent dans la nature suite à des pluies d'orages. L'eau se charge de matériaux dévastateurs tels que les particules fines, sables et les cailloux de tailles variées qui provoque dans la plus part des cas des dégâts considérables. Comme première simplification, nous admettons que le mélange forme un fluide homogène et qui peut être représenté et étudié à partir d'une loi de comportement donnée. Dans ce cadre, les mesures rhéométriques de la littérature (O'Brien et Julien 1988, Coussot 1992 et autres) confirment l'intérêt du modèle d'Herschel-Bulkley.

Avant d'étudier le problème de rupture de barrage avec ce modèle de fluides, i.e le modèle d'Herschel-Bulkley, il convient d'étudier d'abord le problème avec un modèle Newtonien de viscosités élevées. Nous voulons que les contraintes mises en jeu soient du même ordre de grandeur que celles pour un fluide viscoplastique présentant un seuil de contrainte.

Ainsi, le modèle Newtonien utilisé dans cette étude est une solution d'eau et de glucose de

viscosité élevée. Le glucose est disponible au Laboratoire dans des caissons hermétiques de 80 Kg. On fixe la concentration massique en glucose  $C_m$  ainsi que la masse du glucose (environ 25 Kg) nécessaire à nos expériences. On détermine alors la masse (m) d'eau qu'il faut, puis on verse cette quantité dans le glucose. Souvent, avant de mélanger les deux produits, on chauffe le glucose dans une étuve à 75°C pendant une quinzaine de minutes, car l'eau n'est pas très soluble dans le glucose à température ambiante. Ensuite, la solution est malaxée doucement pour que le glucose se dissolve bien dans l'eau, sans emprisonner de bulles d'air dans le fluide.

### I.10.1 Résultats obtenus en rhéométrie

Pour caractériser le produit en rhéométrie, nous avons utilisé le rhéomètre à contrainte contrôlée Carri-med CSL100. Dans cet appareil, le couple est appliqué et contrôlé par un moteur électronique à induction. Les parties tournantes sont supportées par un système de coussins d'air pour diminuer le frottement entre les parties fixes et mobiles. La vitesse angulaire peut être mesurée dans la gamme de  $4 \cdot 10^{-4}$  à 50 rad/s. La précision sur la contrainte est de 5% et celle de la déformation est de 0.5%. La régulation de température est assurée par effet Peltier.

Pour la géométrie, notre choix s'est porté sur le système cône plan. Le principe de cette géométrie est le cisaillement du fluide entre un plan et un cône tronqué coaxiaux en rotation à des vitesses différentes (Figure 12). Le grand avantage de cette géométrie réside dans le fait que le gradient de vitesse est homogène dans l'intervalle tant que l'angle du cône est respecté (inférieur à 6°), l'utilisation des échantillons de petits volumes et la facilité de la manipulation en rotation à des vitesses différentes.

Dans l'hypothèse de l'inertie négligeable (le nombre de Reynolds est petit), les équations du mouvement se simplifient et permettent de déterminer séparément :

- le gradient de vitesse en fonction de la vitesse angulaire ( $\Omega$ ) et de l'angle du cône ( $\alpha$ ) :

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega}{\alpha}$$

- la contrainte en fonction du couple ( $C$ ) et du rayon de l'échantillon ( $R$ ) :

Les essais ont été réalisés avec un cône de diamètre 49 mm, le demi-angle du cône étant de 4,21 degrés et une troncature de 570  $\mu$ . On impose, grâce au logiciel contrôlant le rhéomètre, la contrainte et on mesure la vitesse de rotation du cône qui en résulte en fonction du temps. On prend alors la valeur de la contrainte qui correspond au régime établi.

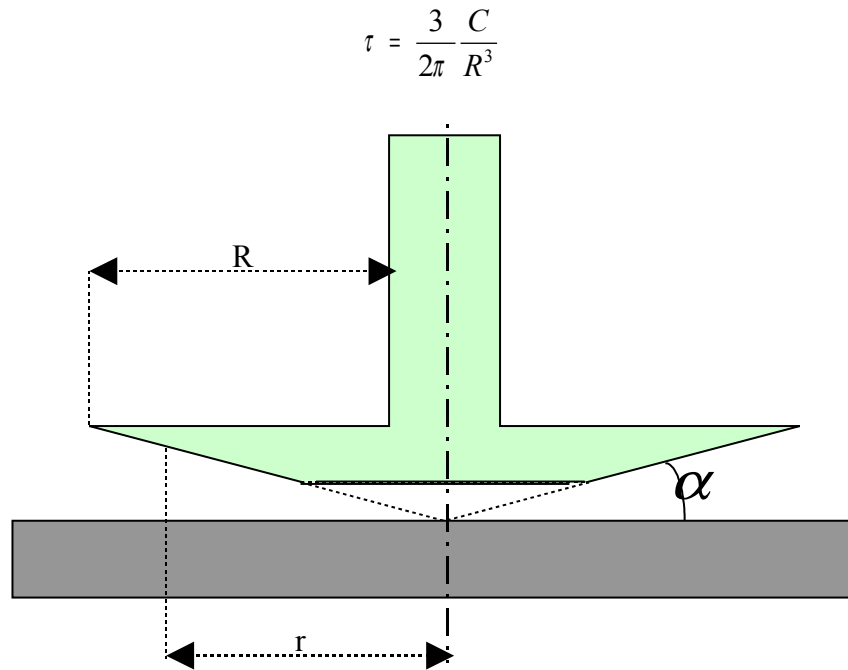


Figure 12 : Principe de mesure cône plan

Dans le Handbook of Physical and Chemical Properties (1987-88) on trouve la viscosité et la masse volumique de la solution eau-glucose pour des concentrations massiques en glucose inférieures à 60%. Pour compléter cette étude, nous avons réalisé une série d'expériences avec des concentrations supérieures. Quelle que soit la concentration du mélange, les résultats obtenus confirment le comportement Newtonien de ce fluide. Donc, le seul paramètre intervenant dans la loi de comportement est la viscosité  $\mu$ . Les Figures (Figure 13, Figure 14) montrent à la fois nos résultats expérimentaux et ceux du Handbook. La Figure 13 représente la variation de la masse volumique en fonction de la concentration, tandis que la Figure 14 représente la variation de la viscosité avec la concentration. La température de mesure est de 20°C avec une précision de  $\pm 0.01^\circ\text{C}$ . On remarque un bon accord entre nos mesures et celles du Handbook. On peut également constater, à partir de la Figure 14, la forte influence de la concentration sur la viscosité.

Puisque nos expériences ont été réalisées à ciel ouvert dans un grand hall d'essai, nous avons jugé également intéressant de savoir l'évolution de la viscosité en fonction de la température. La Figure 15 représente le résultat de ces essais, on obtient une variation exponentielle, avec

$$\frac{\Delta \mu}{\mu} \approx 11.4\% \quad \text{pour} \quad \Delta T = 1^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad C_m = 90\%$$

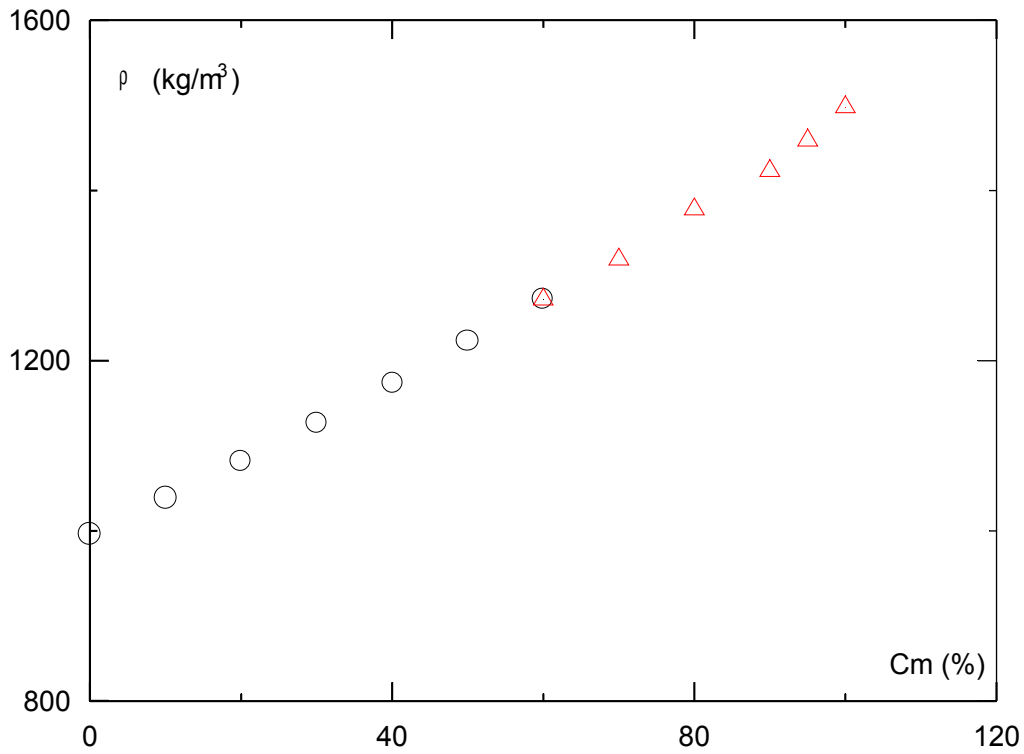


Figure 13 : Variation de la masse volumique en fonction de la concentration massique en Glucose

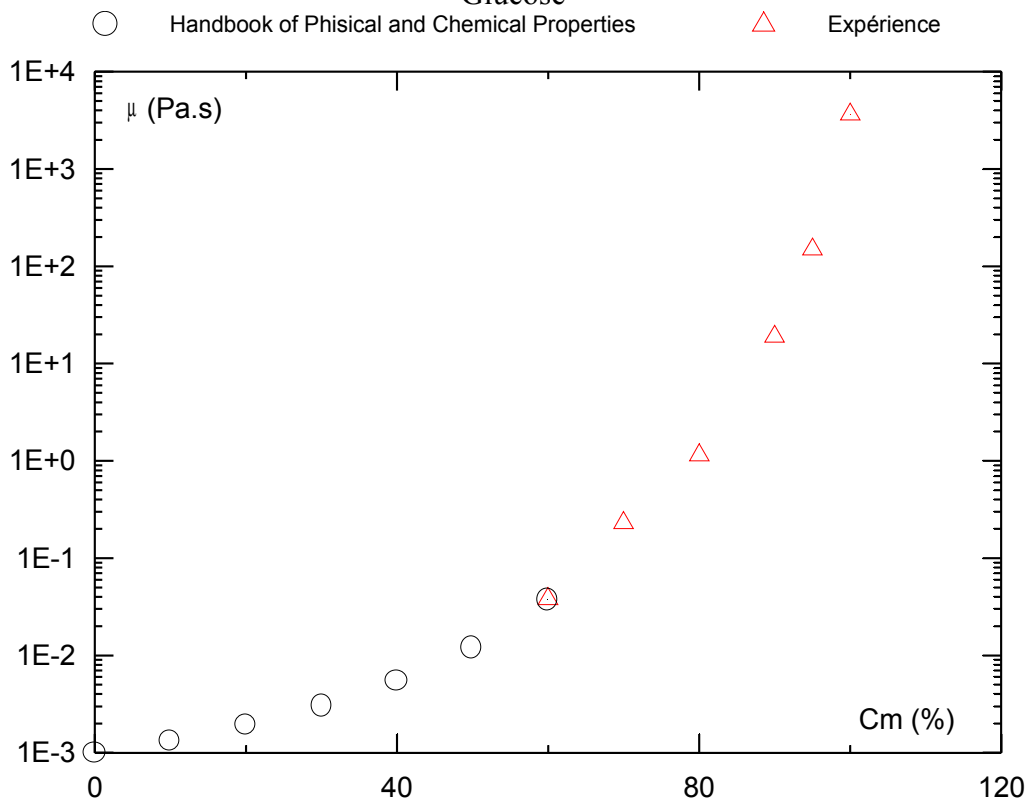


Figure 14 : Variation de la viscosité en fonction de la concentration massique en Glucose,  $\Delta$  Handbook of Physical and Chemical Properties,  $\circ$  Expérience

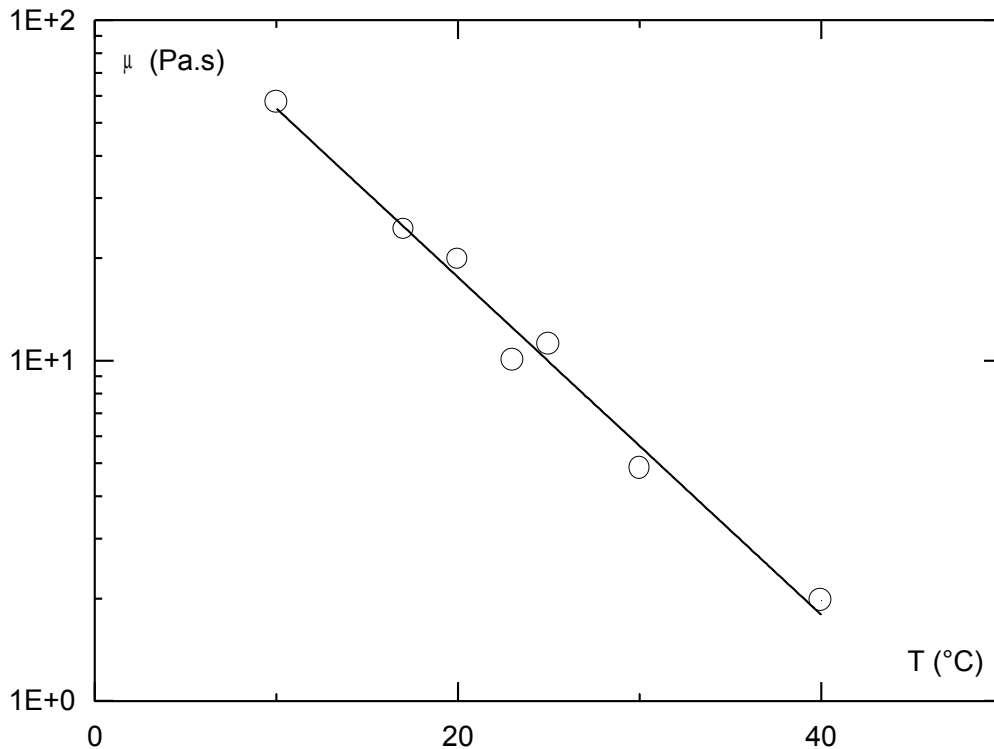


Figure 15 : Effet de la température sur la solution de Glucose ( $C_m=90\%$ )

O Expérience, — Courbe de calage

### I.10.2 Dispositif expérimental utilisé

Afin de reproduire l'écoulement de type rupture de barrage, un dispositif expérimental a été conçu et utilisé avec succès. Ce dispositif expérimental est construit à l'échelle du laboratoire. Cependant, les dimensions et la nature de ces matériaux constitutifs sont soigneusement choisis afin de fournir une base pour simuler des phénomènes aux autres échelles.

#### Plate-forme

Le canal utilisé est rectiligne de largeur 300 mm et de hauteur 100 mm. Le choix de la longueur du canal a été confronté surtout au manque de l'espace dans le laboratoire. Finalement cette longueur a été fixée à 3 m, ce qui réserve cette installation pour l'étude des substances visqueuses seulement. Son grand avantage est qu'elle permet à l'expérimentateur de procéder directement à partir du rez-de-chaussée du laboratoire et de bénéficier de l'aide des personnels de laboratoire.



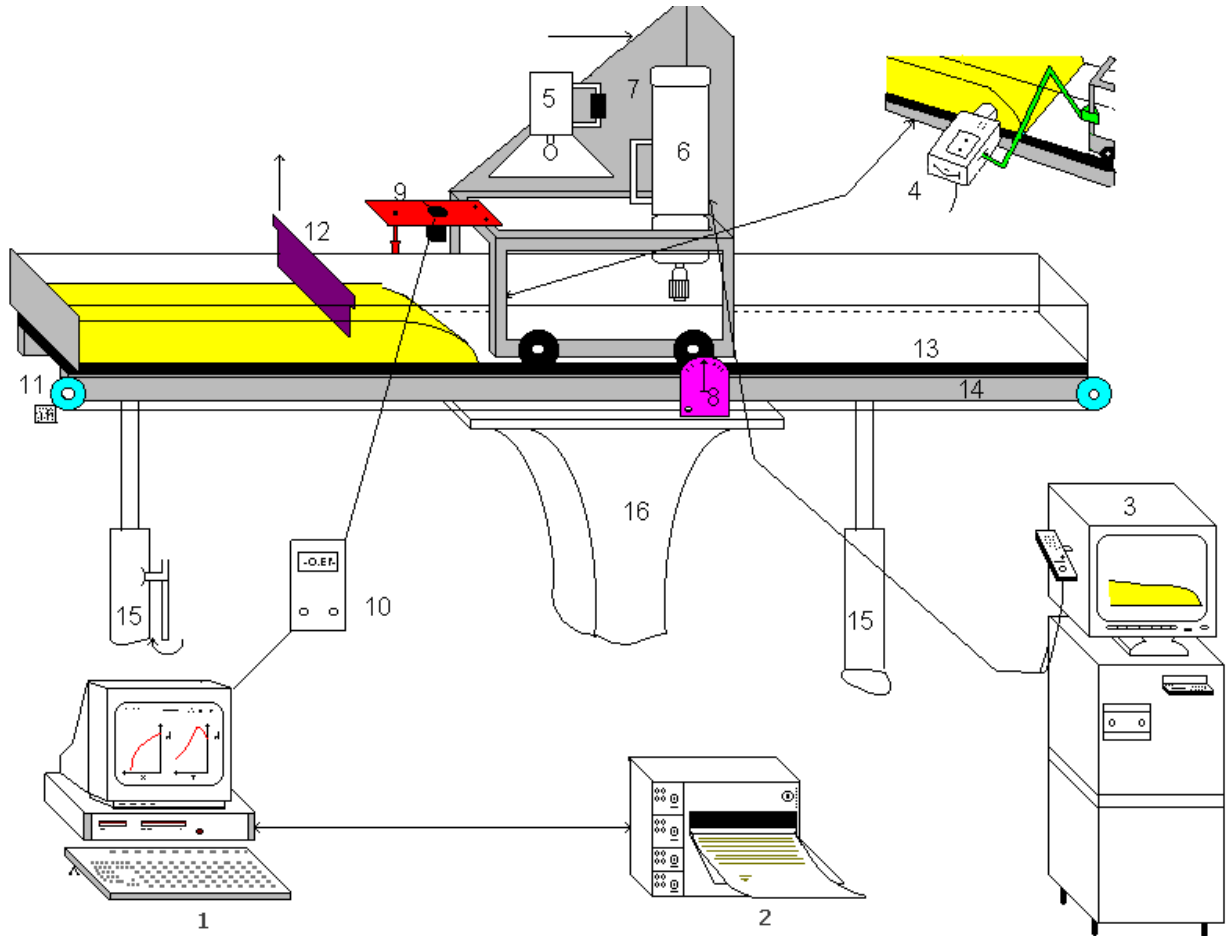


Figure 16 : Dispositif expérimental destiné à l'étude du problème de rupture de barrage

- |                                   |                               |
|-----------------------------------|-------------------------------|
| (1) Station d'acquisition         | (9) Le capteur de déplacement |
| (2) Imprimante                    | (10)Afficheur digital         |
| (3) Moniteur                      | (11)Potentiomètre rotatif     |
| (4) Caméscope (25 images/s)       | (13)Canal                     |
| (5) Système d'éclairage (1000W)   | (14)Bâti porte canal          |
| (6) Caméra rapide (1000 images/s) | (15)Trépieds                  |
| (7) Chariot porte instruments     | (16)Support                   |
| (8) Système de mesure d'angle     |                               |

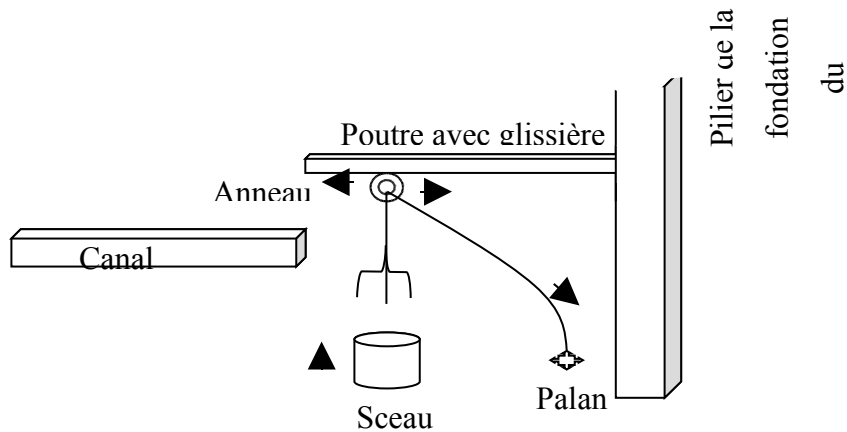


Figure 17 : Mécanisme du remplissage du réservoir par le fluide (solution de Glucose)

Cette plate-forme (Figure 16) est constituée donc essentiellement d'un canal en Plexiglas (15). Le Plexiglas est choisi, pour sa légèreté par commodité, sa transparence et sa surface lisse. Les parois transparentes et lisses permettent une meilleure visualisation à partir d'un angle rasant par rapport à la surface libre du fluide et avec un minimum de déformations optiques. Ceci permet de suivre les évolutions des ondes de surface, ainsi que les étapes de rupture de barrage. Afin d'assurer la solidité du canal, celui-ci est posé sur une surface plane de Duralumin d'épaisseur 20 mm. La largeur de cette surface est supérieure à celle du canal, créant ainsi des rebords qui sont ensuite utilisés comme rails pour le chariot porte instrument (9). Pour éviter les flexions du canal, l'ensemble est fixé sur un bâti porte canal (16). Ce dernier est constitué de deux profilés en I (IPN). Un pied support de camera permet de porter et de soulever l'ensemble (canal, surface plane, bâti porte canal, le chariot), de régler l'horizontalité et d'incliner le canal. Ce pied est constitué d'un support concave (18) dont la base inférieure posée sur le sol est circulaire. Cette base est munie de trois vis permettant d'ajuster l'horizontalité du canal. Sur la partie supérieure du pied est fixé un plateau relié à un système vis écrou afin de régler l'inclinaison (la vis se situe au milieu du pied). Pour faciliter le travail de l'expérimentateur, le support est également muni d'un système permettant le réglage de l'élévation du canal. Malgré les différentes précautions mises en place pour limiter le problème de flexion et aussi pour la sécurité, on a préféré rajouter deux trépieds (17) aux deux extrémités du canal. Ces trépieds, munis chacune d'une manivelle permettant l'ajustement de la hauteur, renforcent l'effet du support et aident à incliner le canal.

Le chariot porte instrument (9) utilise des roues en Duralumin pour se déplacer sur les rebords. Pour une meilleure stabilité, il est muni de trois roues seulement. La hauteur totale du chariot est de 1m ce qui permet plusieurs positionnement des caméras afin de choisir suivant

le cas le meilleur champ de vision. Sa surface, étant assez importante, permet d'accrocher plusieurs autres instruments tels que : la lampe d'éclairage, le capteur ultrasonique, la fibre optique...

### Système optique

Afin de mettre en évidence le phénomène de glissement et du fait de la transparence du canal et du fluide, on a opté pour des mesures optiques. On a choisi dans la plus part des cas un appareil photo (Nikon avec un objectif de 55 mm) au lieu d'une caméra car on observe une meilleure définition sur les photos que sur les films. La prise des photos est réalisée à l'aide de l'appareil mis sur un pied stable et horizontal. L'utilisation d'un film noir et blanc à faible sensibilité permettait de faire ressortir les contrastes avec une faible vitesse d'obturation.

Dans la phase initiale de l'écoulement, le front d'onde avance rapidement. Nous avons préféré dans ce cas d'utiliser le système vidéo rapide NAC HSV 1000 (8). Ce système enregistre les mouvements rapides à 500 ou 1000 images par seconde, en couleur ou en noir et blanc. L'image enregistrée étant contrôlée en permanence sur un moniteur (5). Elle peut être relue immédiatement suivant différents modes. Le système se compose d'une caméra CCD haute résolution et sensibilité élevée, avec obturateur incorporé, un flash électronique de 200 Watts, un magnétoscope lecteur/enregistreur monté sur chariot de transport, un moniteur couleur avec support adapté, un bloc d'alimentation et une télécommande. L'équipement est compact, maniable, facile d'utilisation pour permettre son exploitation pratiquement dans toutes les circonstances qui nécessitent l'enregistrement et l'analyse des mouvements rapides. Avant chaque enregistrement, l'équilibrage des couleurs et l'ajustement de la sensibilité de la caméra peuvent être effectués pour assurer le meilleur rendu possible. Sur chaque enregistrement, un numéro de séquence à trois chiffres est incrusté dans les images, accompagné d'une horloge à sept chiffres donnant les heures, les minutes, les secondes et les millisecondes. Cette incrustation, enregistrée sur bande permet une identification certaine de chaque image et de sa position dans le temps.

Pour étudier la phase finale de l'écoulement, on a utilisé un caméscope de 25 images/s (6). Le caméscope peut fonctionner soit avec une batterie soit avec un adaptateur secteur. Il est relié à un moniteur (3) pour permettre au manipulateur de faire tous les réglages nécessaires pour une meilleure qualité de prises de vues et un bon cadrage de l'image. Les deux caméras (la caméra rapide et le caméscope) sont reliées à une station d'analyse des images (4). Cette station est équipée essentiellement d'un ordinateur muni d'un logiciel de traitement et

d'analyse d'images "Visilog.4". La lecture de la position du front d'onde est facilitée grâce à un papier millimétré fixé au-dessous du canal. L'erreur de lecture est d'environ 0.5 mm.

### Système de mesure des hauteurs

Notons d'abord qu'à cause de la forte adhérence de la solution de Glucose et la sensibilité aux déformations du gel de Carbopol, l'existence dans l'écoulement d'un obstacle peut provoquer des conséquences. Ainsi, l'utilisation ici des capteurs de pression ou les sondes conductimétriques sont déconseillés. Donc, on doit chercher des méthodes de mesures sans contact avec le fluide. Il existe pour cela trois techniques principales : par adsorption de rayonnement  $\gamma$ , par onde acoustique et par microondes. Il est également possible d'utiliser la technique de prises de vues photographiques.

On a opté pour le système de mesure par ondes acoustiques (par ondes ultrasonores afin d'avoir une meilleure précision "LRS 3 TYPE 262"). Ce système est composé essentiellement d'un boîtier électronique et d'un capteur de déplacement LRS3 (11). Le boîtier électronique est en aluminium. Il est équipé pour recevoir la sonde de température et l'alimentation électronique. Le capteur de déplacement LRS3 (11) sert à la mesure précise du déplacement dans l'air grâce aux ultrasons en comptant le temps mis par l'impulsion sonore pour parcourir le trajet de la cellule à l'objet et son retour. Le diamètre de la surface active de notre cellule LRZ-40P est de 40 mm. L'étendue de mesure du LRS3 a une limite inférieure qui est de 80 mm et une limite supérieure de 800 mm. Les capteurs à ultrasons ont une efficacité maximum dans la direction de l'axe d'émission. Mais lorsque la cible ne se trouve pas exactement sur cet axe, il est possible de faire une mesure de la distance. L'inclinaison admissible de la cible sur l'axe dépend de la forme, la grosseur, la surface de la cible et aussi de la distance à mesurer. La distance séparant le fond du canal et la cellule doit être supérieure à la hauteur du canal plus l'étendue inférieure de la cellule, d'où une distance minimale de 200 mm pour effectuer correctement nos mesures étend donné la hauteur maximale du canal. A cette altitude, le capteur ultrasonique est fixé sur le chariot porte instrument. L'appareil effectue ses mesures avec une précision de  $\pm 0,1mm$ . A cette erreur s'ajoute celle due aux vibrations du chariot lors de son déplacement, qu'on a essayé de diminuer en déplaçant le chariot lentement tout en appuyant suffisamment fort. D'autres erreurs irrémédiables dues aux limites d'utilisation du système ultrasonique subsistent. Près du front d'onde la hauteur est faible et la pente de la surface libre dépasse celle admise par le système ( $\pm 12^\circ$ ). Pour de fortes concentrations en Carbopol la surface libre laisse apparaître des instabilités entraînant les gondolements qui peuvent dépasser dans certains cas 3mm de hauteurs (lorsque le fluide est très concentré).

Notons l'existence d'autres causes d'erreurs liées à ce système, mais qui n'apparaissent pas dans notre cas : forte variation de température entre la cible et le capteur, humidité, et courants d'air.

La position du capteur ultrasonique (fixé sur le chariot) est localisée par un mécanisme constitué par un potentiomètre relié à deux poulies (13). Ces dernières sont fixées aux extrémités du canal longeant le même côté. Un fil métallique de 2 mm de diamètre est attaché au chariot et passe en rotation par les deux poulies. Le mouvement de déplacement du chariot se transforme en mouvement de rotation des poulies, d'où une variation de la tension de sortie du potentiomètre. Ce système calcule les abscisses avec une erreur estimée à 1mm (erreur due essentiellement au calibrage). Le capteur ultrasonique et le potentiomètre sont reliés à l'ordinateur (1) pour obtenir la combinaison entre la profondeur du fluide et la position du capteur ultrasonique.

L'ordinateur (1) est équipé d'une carte à huit entrées. Deux ont été utilisées, une pour les hauteurs et l'autre pour les abscisses. Un logiciel installé dans l'ordinateur (conçu au laboratoire) permet en premier lieu, la conversion des signaux analogiques en signaux numériques et en deuxième lieu une sauvegarde et une meilleure représentation des données. Au cours de l'expérience, deux courbes sont constamment affichées sur l'écran de l'ordinateur, l'une représente l'évolution de la hauteur en fonction du temps et l'autre la variation des hauteurs en fonction des abscisses. Ces courbes servent au bon suivi de l'écoulement.

On a préféré dans certains cas utiliser des moyens optiques au lieu des ultrasons, par exemple au voisinage du front d'onde. Cette technique nous a paru la plus fiable puisque dans cette région la pente de la surface libre est très importante et les profondeurs sont très faibles, ce qui induit des erreurs importantes en cas d'utilisation des ultrasons. On a donc placé une caméra en face du canal. La détermination des frontières (surface libre, fond du canal) est obtenue par une tranche LASER dont l'axe optique est parallèle à l'axe du canal. On obtient donc une tranche LASER confondue avec le plan de symétrie du canal permettant ainsi d'avoir une trace lumineuse délimitant les frontières. Le réglage de la position de la caméra vidéo et du LASER est obtenu manuellement à l'aide d'un moniteur. Une fois que la caméra et le LASER ont été bien fixés sur le chariot, on met en marche la manip, on fait glisser par la suite le chariot sur les rails à la vitesse du front d'onde tout en essayant de garder l'image du front sur le moniteur. A la fin de l'écoulement les cassettes vidéo seront analysées sur micro-ordinateur à l'aide du logiciel de traitement et d'analyse d'images "Visilog.4". Cette analyse permet l'acquisition des grandeurs spatiales et temporelles. Les grandeurs spatiales sont obtenues en pixels comme unité de longueur. Pour les convertir en unité de longueur réelle

(millimètre), un réseau de traits carré d'un millimètre de maille est tracé sur une planche puis posé avant la rupture de barrage au centre du canal. A partir d'une image prise de ce réseau, on peut donc faire la conversion souhaitée (pixel en millimètre).

### Procédure expérimentale

Avant toute manipulation, il faut s'assurer grâce à un niveau que le canal est parfaitement horizontal. Il faut minimiser ensuite les perturbations dues aux impuretés en nettoyant le canal ainsi que le matériel nécessaire à l'expérience avec un solvant organique (de l'éther de pétrole) qui ne sera pas nocif pour le Plexiglas. Pour éviter le glissement, on colle au fond du canal du papier rugueux de 0.2 mm. Avant de remplir le canal, il faut bien mélanger la préparation pour la rendre parfaitement homogène tout en évitant de créer des bulles d'air qui fausseraient les mesures. Lorsque le cas s'est présenté, on a utilisé une seringue pour en éliminer le plus grand nombre. Le remplissage du canal s'effectuait progressivement et minutieusement afin d'éviter de créer de nouveau des bulles d'air. Pour résoudre le problème de fuite du fluide à travers la plaque "barrage" (14), on a fixé sur les bords de la plaque des joints en caoutchouc mousse. On s'assure que le fluide est en équilibre, on prélève la température initiale et aussitôt après on soulève verticalement, manuellement et rapidement la plaque.

Après toutes ces opérations, différentes procédures sont réalisées selon les mesures à effectuer:

Les positions du front d'onde ont été mesurées donc grâce à des caméras ; de cadence 1000 images/s dans les quelques secondes après la rupture, et le reste avec une caméra de 25 images/s. Une fois bien fixées sur le chariot, on démarre l'enregistrement des cassettes, puis on soulève rapidement la plaque "barrage" pour laisser le fluide s'écouler. On fait ensuite glisser le chariot à la vitesse du front d'onde tout en suivant l'écoulement à l'aide des moniteurs. Quelques dizaines de secondes après l'enlèvement de la plaque, on arrête la caméra rapide et on garde la deuxième caméra en marche jusqu'à la fin du film (90 mn).

Du fait de la rapidité d'avancement du front, juste après la levée de la plaque, et des limites du champ de vision des caméras, on a procédé à une mesure en plusieurs étapes : on place la caméra de sorte que le barrage soit visible au début du champ de vision. On note alors la dernière position du front d'onde ( $x_{f0}$ ) observable et le temps correspondant. Dans les mêmes conditions expérimentales, on refait un deuxième essai en plaçant cette fois-ci la caméra telle que l'on puisse observer l'abscisse  $x_{f0}$  au début du champ. On note le temps correspondant au passage du front d'onde en cette abscisse ( $x_{f0}$ ). On crée alors un repère temporel dans lequel ces deux temps seront identiques. On refait ces étapes jusqu'à ce que la vitesse du front d'onde

soit assez lente pour que qu'on puisse suivre le front d'onde par simple déplacement du chariot.

Comme cité plus haut, la profondeur du fluide est mesurée grâce au système ultrasonique accompagné d'un potentiomètre. Pour mesurer la variation de hauteurs en fonction du temps, le chariot est immobile dans une station fixe. Par contre, les profils de la surface libre sont déterminés en déplaçant le chariot d'une extrémité à l'autre de l'écoulement. L'étalonnage des deux instruments est une opération indispensable. Pour étalonner le potentiomètre, on mesure un déplacement connu du chariot, tandis que le système ultrasonique est étalonné en mesurant une hauteur connue d'une plaquette. Si l'ordinateur n'affiche pas les bonnes valeurs, on modifie les coefficients de proportionnalité entre les signaux analogiques et les signaux numériques. Lors de chaque manipulation, il est nécessaire d'une part de vérifier notre étalonnage, d'autre part de régler l'origine d'abscisse et de hauteur respectivement au bord amont du canal et au fond de celui-ci.

### Remplissage du réservoir par le fluide

Le procédé de remplissage du réservoir par le fluide diffère suivant la situation du canal (horizontal ou incliné).

#### Canal horizontal

Les paramètres à respecter sont la longueur ( $L$ ) et la hauteur ( $H$ ) initiale du réservoir. On commence toujours par mettre la plaque dans la position  $L$ .

Pour la solution de glucose, le remplissage du réservoir se fait tout droit du seau (capacité 30 l) où la solution a été préparée. Cela pour éviter d'une part de maculer la plate-forme avec le produit (fluide très gluant) et d'autre part pour éviter l'utilisation d'une écope (gaspillage d'une importante quantité du fluide qui reste collé à l'intérieur de l'écope). Pour soulever la masse importante du fluide (environ 38 Kg) jusqu'à la cote du réservoir (1.6 m), un mécanisme a été construit. Ce mécanisme (Figure 17) est constitué d'un palan et d'une poutre munie d'une glissière et d'un anneau. Le palan comporte un mécanisme démultiplicateur (moufles, cordes etc.) qui permet de soulever des charges avec un effort moteur relativement faible. La poutre en acier est fixée horizontalement à une hauteur de 2.5 m. Un des piliers de la fondation du laboratoire permet sa fixation. Les cordes passent par un anneau, puis elles viennent s'attacher au seau. L'anneau peut se déplacer horizontalement (entraînant le seau) grâce à la glissière. Une fois que le seau est monté à la hauteur convenable, on verse le fluide jusqu'à avoir la profondeur du réservoir voulue. L'afficheur du système ultrasonique permet le contrôle de cette profondeur (l'erreur de lecture est de 0.1 mm). Notons que le lissage de la surface libre

n'est pas nécessaire, plutôt il est déconseillé à cause de la forte viscosité du fluide. En pratique le fluide retrouve son état d'équilibre (surface libre horizontale) quelques secondes après.

### Canal incliné

Notons d'abord que la mesure de l'inclinaison du canal s'effectue à l'aide d'un instrument appelé "niveau d'angle" (10). Ce niveau apporte une bonne précision ( $0.1^\circ$ ), même pour de faibles inclinaisons. L'instrument, muni d'un aimant à sa base, se fixe à une plaque en acier qui est elle-même soudée à un plateau ayant la même horizontalité que le canal. L'étalonnage de l'horizontalité de l'instrument à zéro degré d'inclinaison est indispensable. Une fois que la longueur initiale du réservoir  $L$ , et la pente du canal  $\alpha$  sont choisies, on détermine à partir de quelques considérations géométriques :

la hauteur du fluide à l'emplacement du barrage

$$H = L \sin(\alpha)$$

le volume du fluide nécessaire

$$V = \frac{L^2}{4} \sin(2\alpha)$$

dont on déduit connaissant la masse volumique du fluide, la masse de ce volume :

$$M = \rho V$$

La technique la plus aisée utilisée pour remplir le réservoir consiste à incliner, à l'aide du système de mesure d'angle, le canal à l'angle voulu. A l'abscisse  $L$  comptée de l'extrémité amont du canal, on fixe verticalement une plaque graduée. Un petit niveau à bulle placé sur la plaque permet la vérification de la verticalité. Après, on remplit doucement le fluide dans le réservoir. On arrête le remplissage lorsqu'on lit sur la plaque graduée la valeur  $H$ . L'erreur commise dans la lecture est d'environ 0.5 mm. On obtient une meilleure précision en mesurant, cette fois-ci, dans un seau une quantité  $M$  du fluide. On incline le canal, puis on verse l'intégralité de la masse dans le réservoir. On corrige en suite la masse  $M$  réellement utilisée par la quantité du fluide qui reste coller dans le seau entraînant une mauvaise estimation du volume initial du fluide.

### I.10.3 Canal horizontal

#### Evolution de la position du front en fonction du temps

Il nous a semblé intéressant de commencer cette étude expérimentale par la caractérisation de l'influence à la fois de la longueur du réservoir " $L$ " et la viscosité du fluide " $\mu$ " sur la vitesse du front d'onde. C'est cette onde qui présente un danger véritable pour l'homme et pour



son environnement. On a donc mené une série d'expérience avec une hauteur initiale du réservoir constante égale à  $55 \text{ mm}$  (environ  $\frac{1}{2}$  de la hauteur maximale du canal). On a choisi cette valeur de telle sorte qu'on puisse avoir un rapport longueur/hauteur le plus grand possible tout en laissant un champ vaste au front d'onde qui lui permettra sa propagation à des temps grands sans risque de débordement du fluide. Les expériences ont été réalisées avec quatre viscosités différentes (170, 130, 85 et 12 Pa.s) en faisant varier pour chaque viscosité la longueur initiale du réservoir, voir Figure 1 où  $b$  est la largeur du canal et  $Re$  est le nombre de Reynolds. Les mesures de viscosité ont été réalisées à l'aide du rhéomètre Carri-med C.S.L 100 à contrainte contrôlée.

Tableau 1 : Différentes configurations de l'écoulement

Désignation	Viscosité $\mu \text{ (Pa.s)}$	H(mm)	L(mm)	H/L	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	b/2H	Re
Glus.1	170	55	600	0.092	1443	2.73	8.23E-05
Glus.2		55	110	0.5	1443		2.45E-03
Glus.3	130	55	440	0.125	1418		2.53E-04
Glus.4		55	330	0.167	1418		4.49E-04
Glus.5		55	220	0.25	1418		1.01E-03
Glus.6	12	55	440	0.125	1406		2.92E-02
Glus.7		55	220	0.25	1406		1.17E-01
Glus.8		55	110	0.5	1406		4.67E-01
Glus.9	85	54	440	0.123	1413		2.78

La Figure 18 présente en variables dimensionnelles l'évolution de la position du front en fonction du temps.  $x = 0$  correspond à l'emplacement du barrage. Il semble au départ que la longueur du réservoir n'a aucune influence. Cependant, à partir d'un certain temps, les courbes s'écartent progressivement.

La position du front devient plus avancée en augmentant la longueur initiale. Les figures sont représentées en échelle logarithmique permettant ainsi de bien observer les différentes phases typiques de l'écoulement.

On remarque que le premier régime d'écoulement a la même pente que la solution théorique de Ritter, nous pensons alors qu'il s'agit d'un régime à dominance inertiel. Sur la Figure 18 la solution inertielle a été tracée. La vitesse du front mesurée est largement inférieure à celle de Ritter (approximativement sept fois moins). Donc, il n'est pas raisonnable de lier cet écart aux petits effets visqueux seulement.

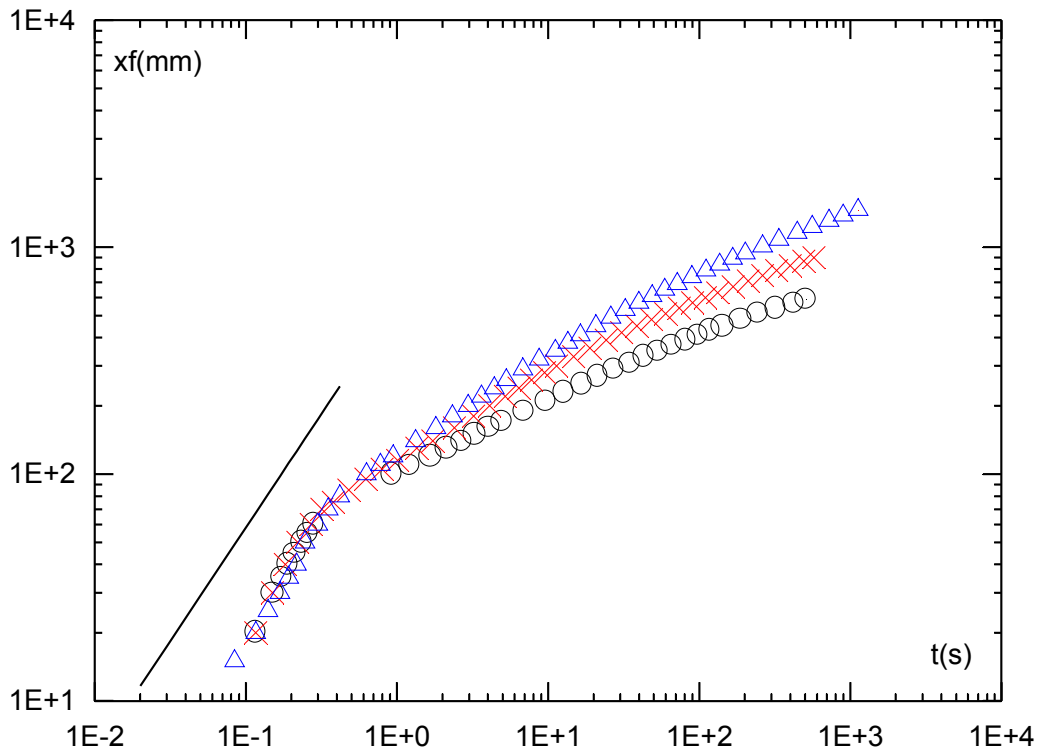


Figure 18 : Evolution de la position du front d'onde en fonction du temps ; fond horizontal ; variables dimensionnelles ; Glus.6-8, — théorie  
 O Glus.6, × Glus.7, Δ Glus.8, — théorie

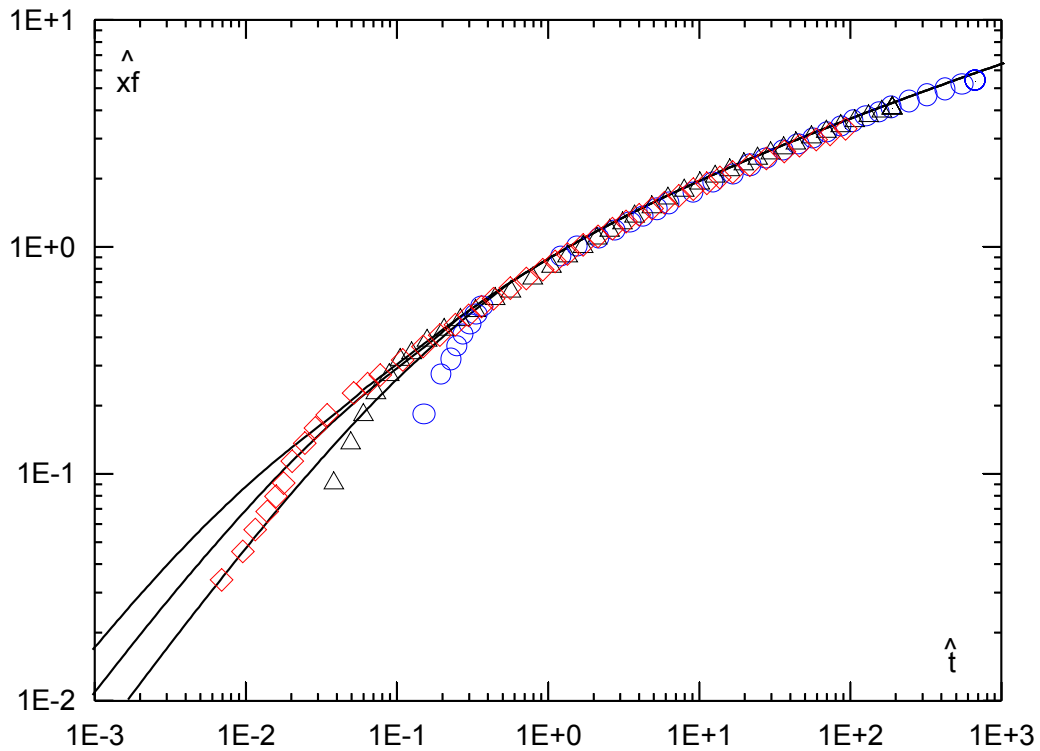


Figure 19 : Comparaison théorie-expérience de l'évolution du front d'onde en fonction du temps ; Glus.6-8 ; fond horizontal ; variables adimensionnelles,  $\diamond$  Glus.6,  $\Delta$  Glus.7, O Glus.8, — théorie

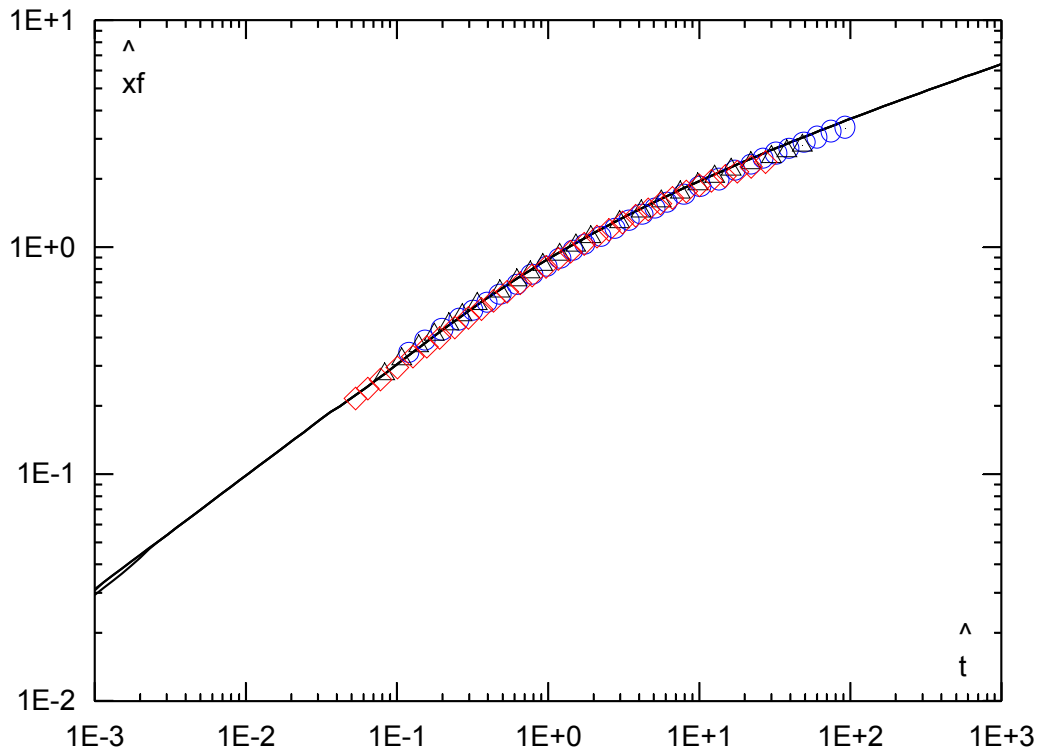


Figure 20 : Comparaison théorie-expérience de l'évolution du front d'onde en fonction du temps ; Glus.3-5 ; fond horizontal ; variables adimensionnelles

O Glus.3,  $\Delta$  Glus.4,  $\diamond$  Glus.5, — théorie

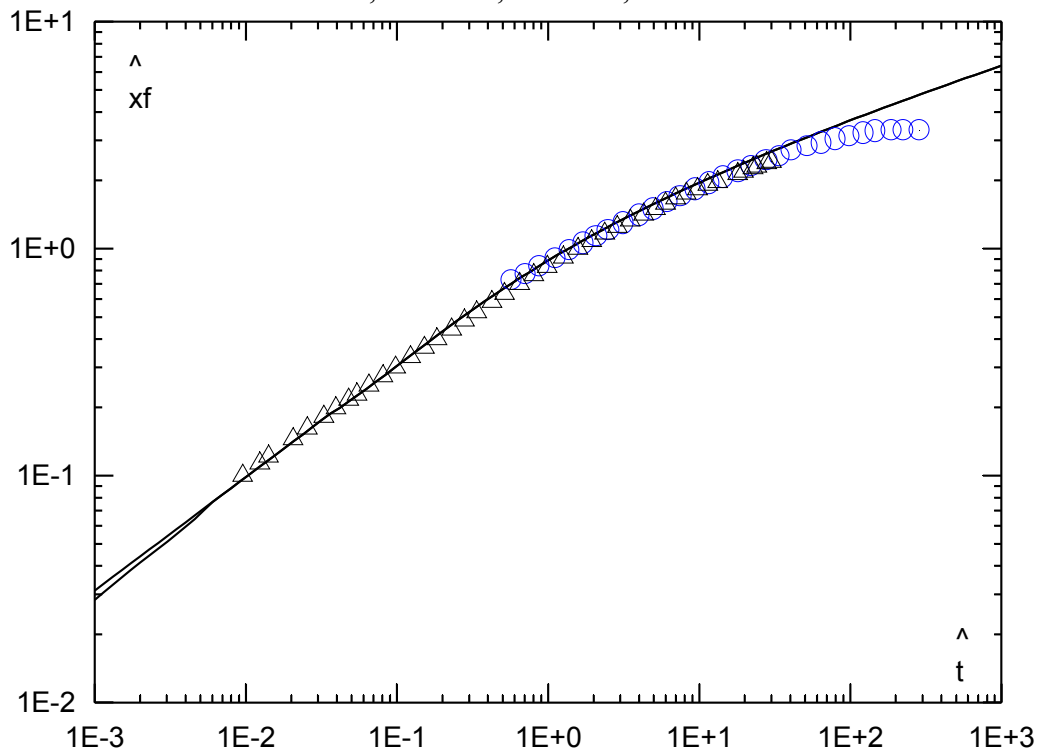


Figure 21 : Comparaison théorie-expérience de l'évolution du front d'onde en fonction du temps ; Glus.1-2 ; fond horizontal ; variables adimensionnelles,  $\Delta$  Glus.1, O Glus.2, — théorie

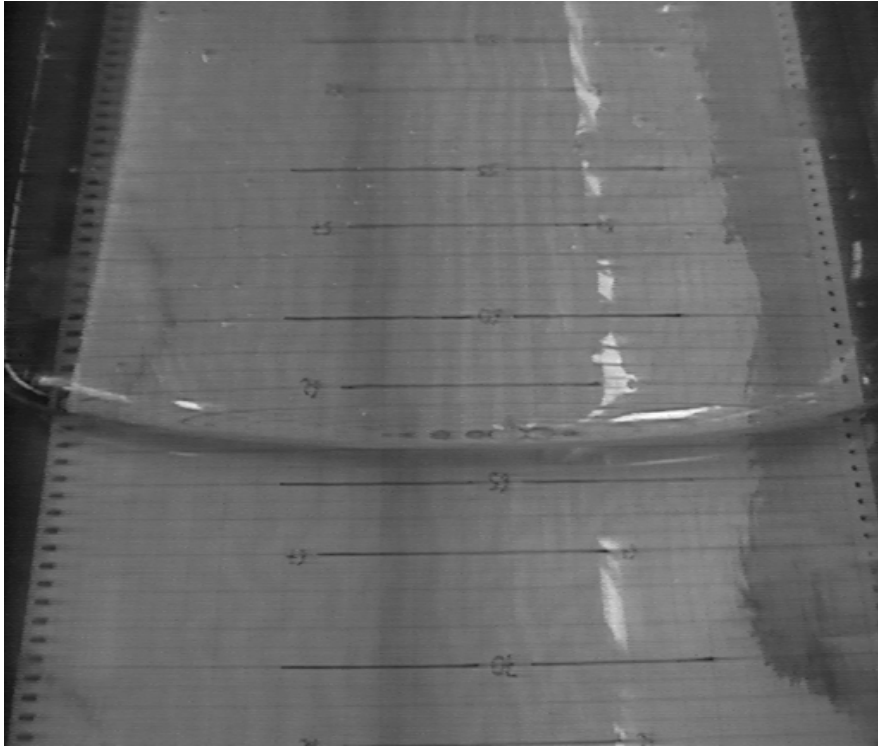


Figure 22 : La forme du front d'onde suivant la direction (Oz) ;  
fond horizontal ; Glus.6;  $t=120$  s

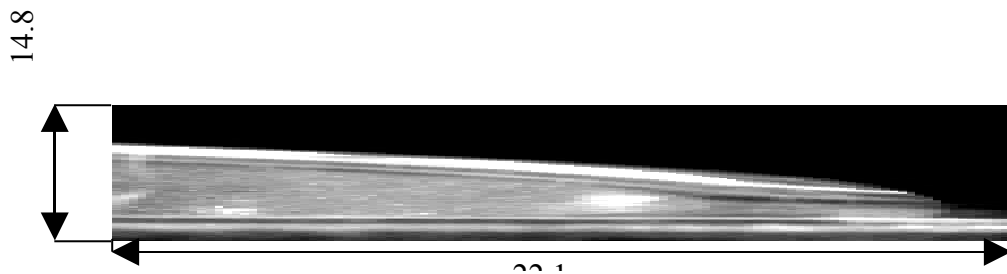


Figure 23 : La forme du front d'onde ; fond horizontal ; Glus.6,  $t=421$  s

En réalité, d'autres mécanismes interviennent dans ces premiers instants, comme la perturbation provoquée par la levée progressive de la plaque, la distribution non-hydrostatique de la pression et enfin les effets des bords. En effet, le temps correspondant à la fin du premier régime d'écoulement est d'environ 0.25 s, qui représente un peu plus que le temps nécessaire à la levée totale de la plaque. D'après nos estimations, le barrage est levé avec une accélération d'environ  $1/3$  g.

Ainsi, il est fort possible que cette accélération supplémentaire contribue à diminuer la valeur réelle de g. En outre, selon l'étude expérimentale de Estrade (1967), une suppression non-instantanée du barrage entraîne, dans un premier temps, une croissance de la vitesse du front à partir d'une valeur approximativement égale à la moitié de celle de Ritter, i.e  $\approx \sqrt{gH}$ , puis

elle décroît. La valeur de la vitesse maximale obtenue par l'auteur est légèrement inférieure à la valeur théorique de Ritter, qui suppose que la suppression du barrage est instantanée. Estrade explique le domaine d'accroissement de la vitesse par l'influence d'une rupture progressive du barrage, tandis que la diminution est attribuée aux effets de résistance hydraulique. Ainsi, nous retenons que la suppression non-instantanée du barrage peut induire un écart sur la vitesse du front d'onde pouvant atteindre 100%. D'autre part, la non distribution hydrostatique de la pression a également une influence dans cette phase initiale de l'écoulement. Selon quelques études numériques (voir Mohapatra & al 1999), cet effet réduit la vitesse du front d'environ 30% par rapport à la solution analytique de Ritter. Leurs résultats indiquent également que la profondeur dans la section du barrage ne peut atteindre la valeur constante de Ritter  $((4/9)H)$  qu'à partir de  $t \approx 8\sqrt{H/g}$ , qui est proche de la valeur déterminée expérimentalement par Dressler (1954), i. e  $\approx 9\sqrt{H/g}$ .

On peut observer (Figure 18) après ces petits instants que deux autres régimes apparaissent: le premier est de pente  $1/2$ , et le dernier a une pente asymptotique de  $1/5$ . Ces résultats sont en bon accord avec la théorie visqueuse. Le second et le troisième régime d'écoulement peuvent être alors attribués à la prépondérance complète du terme visqueux devant l'inertie

Sauf indication contraire, dans la suite, les figures seront représentées, comparées et discutées en fonction des variables adimensionnelles où les variables physiques  $h$ ,  $x$ ,  $t$  et  $x_f$  sont remplacés par  $\hat{h}$ ,  $\hat{x}$ ,  $\hat{t}$ , et  $\hat{x}_f$ .

Les figures (Figure 19, Figure 20, Figure 21) montrent l'évolution en fonction du temps de la position du front. Au-delà d'un certain temps, tous les mesures se superposent sur une loi unique indiquant ainsi le bon choix des variables adimensionnelles. En regard de la forte viscosité des solutions désignant les essais Glus.1 et 5 (Tableau 1) les points mesurés aux premiers instants n'étaient pas reproductibles. Une quantité de fluide reste collée à la plaque et une autre quantité, plus importante, est entraînée par son mouvement générant des erreurs remarquables dans ces premiers instants. Ainsi, tous ces points ont été enlevés.

Dans ces figures, les courbes en ligne continues représentent la solution approchée de ce problème. L'accord est donc remarquable. Cependant, quelques différences apparaissent. Le premier grand écart peut être observé aux faibles abscisses sur la figureFigure 19 où le calcul donne des valeurs plus grandes que les mesures. La déviation maximale de 90% correspond toujours au premier point, et cet écart tombe nettement au cours du temps. L'explication de

cette différence a été donnée auparavant : une erreur d'environ 100% peut être provoquée par la non instantanéité de la rupture, et d'environ 30% par la non distribution hydrostatique de la pression. Nous rappelons que ces estimations ont été déduites à partir de quelques études publiées dans la littérature (Estrade 1967 et Mohapatra & al 1999). Il semble cependant que ces causes d'erreurs disparaissent lorsque le front d'onde de rupture de barrage parcourt une distance supérieure à  $1.1 H$ . Après, la déviation moyenne devient meilleure que 5.5%, et l'écart maximal est de 10% obtenu aux voisinages de  $\hat{t} = 1$ . Cette erreur est peut être due à la sous estimation de la transition existante entre la solution aux temps petits et la solution aux temps grands.

Le deuxième plus grand écart apparaît sur la Figure 21 et spécialement aux temps très grands où l'écart atteint 44 % (la pente égale à  $1/5$  n'apparaît pas). Ce cas correspond à une viscosité égale à 170 Pa.s et un rapport  $H/L = 1/2$ . Nous avons observé ici une impression d'arrêt causée certainement par les effets de résistances dus aux bords du canal et surtout à la cristallisation du produit. Ceux-ci ne sont pas négligeables dans ce cas vu la petite quantité de fluide utilisée et la très forte viscosité du fluide, entraînant de faibles vitesses d'écoulement, et donc une tendance du fluide à se cristalliser en contact avec le milieu extérieur. Notamment au voisinage du front d'onde où des instabilités sous forme de doigts ont été observées.

### Profil de l'écoulement

La photographie (Figure 22) montre la forme suivant la direction  $z$  du front d'onde, qui est donc proche d'une parabole. Cela s'explique par l'existence, comme on le sait, d'une couche limite à fort gradient de vitesse, entraînant ainsi une vitesse plus importante au centre du canal qu'au voisinage des parois latérales. La photographie (Figure 23) représente la forme du front d'onde. La profondeur diminue le long de  $x$  et atteint la valeur zéro à l'abscisse du front d'onde. Cette photographie montre également un phénomène produit par le front d'onde caractérisé par un retournement des particules du fluide situées près du fond. Ce phénomène est dû aux effets de l'écoulement bidimensionnel, mais en outre les effets de la tension superficielle jouent, en raison de la faible valeur, dans cette région, du rayon de courbure de l'interface air-liquide. Dans le but de notre étude ici, ces effets ont été négligés car la longueur de cette zone est très petite devant la longueur totale de l'écoulement ( $\approx 1.5 \text{ mm}$ ).

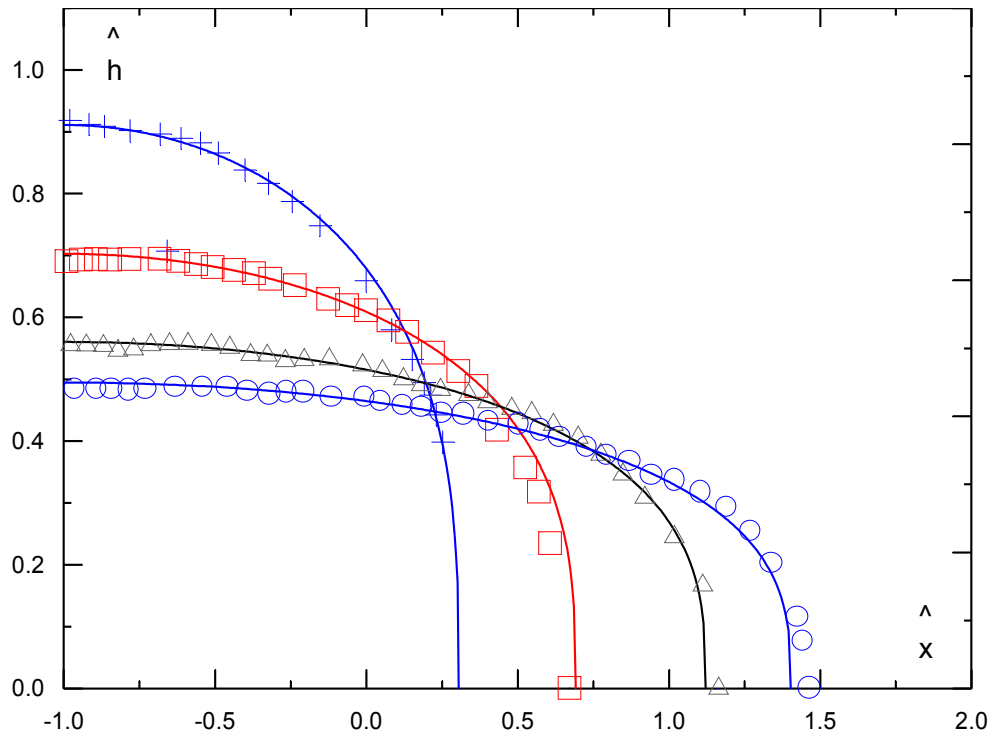


Figure 24: Comparaison théorie-expérience du profil de l'écoulement ; fond horizontal; variables adimensionnelles; Glus.9, +  $\hat{t} = 0.1$ ,  $\hat{t} = 0.55$ ,  $\Delta \hat{t} = 1.85$ , O  $\hat{t} = 3.51$ , — théorie

On représente sur la Figure 24 quelques mesures du profil de la surface libre et qui sont comparés dans la même figure aux calculs théoriques (théorie visqueuse). Les valeurs de ces temps sont supérieures au temps maximum de la perturbation provoquées par la levée de la plaque. On peut noter le changement global du profil de l'écoulement par rapport au profil parabolique de Ritter, on obtient cependant un accord satisfaisant avec la théorie visqueuse. Dans la région supérieure, l'accord est meilleur que 2% et dans la région frontale, l'écart est inférieur à 10%. La déviation moyenne est d'environ 0.7%, région frontale incluse. Puisque, la tangente de la surface libre est très importante dans la région frontale, l'écart maximal obtenu dans cette région peut être attribué : d'une part à l'équipement employé, i.e., système ultrasonique ; d'autre par à un effet physique (spécialement aux effets de l'écoulement bidimensionnel).

#### hydrographe de hauteur et hauteurs maximales

La Figure 25 montre un hydrographe de hauteur type correspondant à une section assez proche de  $x = -L$ . Immédiatement après la rupture, la profondeur du fluide est quasiment constante, puis, à partir d'un certain temps, la hauteur diminue. Aux temps grands, on obtient une loi qui varie à la puissance  $-1/5$  du temps, qui est donc inversement proportionnelle à la loi d'évolution du front. Les mesures sont comparées à la théorie visqueuse, l'accord est satisfaisant. Les hydrographes de hauteur dans les stations amonts sont présentés sur la Figure

26 D'une manière générale, la profondeur du fluide est nulle jusqu'à où le front d'onde atteint la station d'étude, puis la hauteur augmente pour atteindre une valeur maximale, ensuite elle décroît. Les mesures sont comparées à la théorie visqueuse, on obtient un accord satisfaisant. La déviation moyenne de l'ensemble des hydrographes mesurés (en amont ou en aval) est d'environ 7.5%, tandis que l'écart maximal est d'environ 12% obtenu au début et à la fin de l'écoulement.

La superposition de plusieurs profils de la surface libre, montre l'existence en aval du barrage d'une courbe enveloppe, c'est la courbe des hauteurs maximales. On représente alors sur la Figure 27 la variation de la hauteur maximale en fonction de l'abscisse. Les mesures sont comparées à la théorie visqueuse, l'accord est satisfaisant. La déviation moyenne est d'environ 2% et l'écart maximal est d'environ 8%.

En résumé, la comparaison entre les mesures et les prédictions théoriques révèle un accord remarquable. Les différences observées ne sont pas dues seulement aux erreurs expérimentales, mais également à quelques phénomènes physiques. Ainsi, le plus grand écart obtenu dans la phase initiale de l'écoulement a été expliqué à la fois par les perturbations provoquées par la levée du barrage, et également par la répartition non-hydrostatique de la pression. De plus, l'autre écart obtenu à la fin de l'écoulement a été attribué aux effets des bords et à la cristallisation du produit. L'écoulement bidimensionnel et la tension superficielle ont également un effet qui se manifeste par la déviation, à l'abscisse du front d'onde, de la trajectoire de l'écoulement. Mais malgré tout, le domaine d'application du calcul théorique est assez grand. Les écarts obtenus sont raisonnables, vu les conditions dans lesquelles l'étude expérimentale a été réalisée (à ciel ouvert) et la forte sensibilité de la viscosité du fluide aux variations de la température.



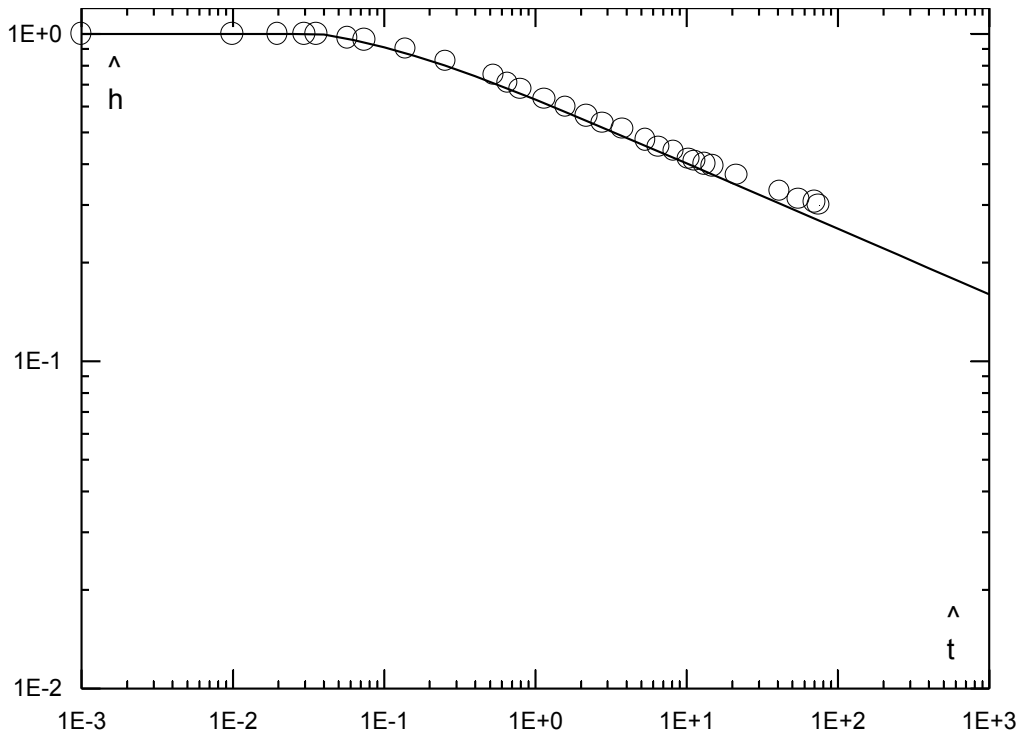


Figure 25 : Comparaison expérience-théorie d'un hydrographe de hauteurs dans une station située en amont; fond horizontal ; variables adimensionnelles ; Glus.6,  
 $x=-420$  mm, o expérience, — théorie

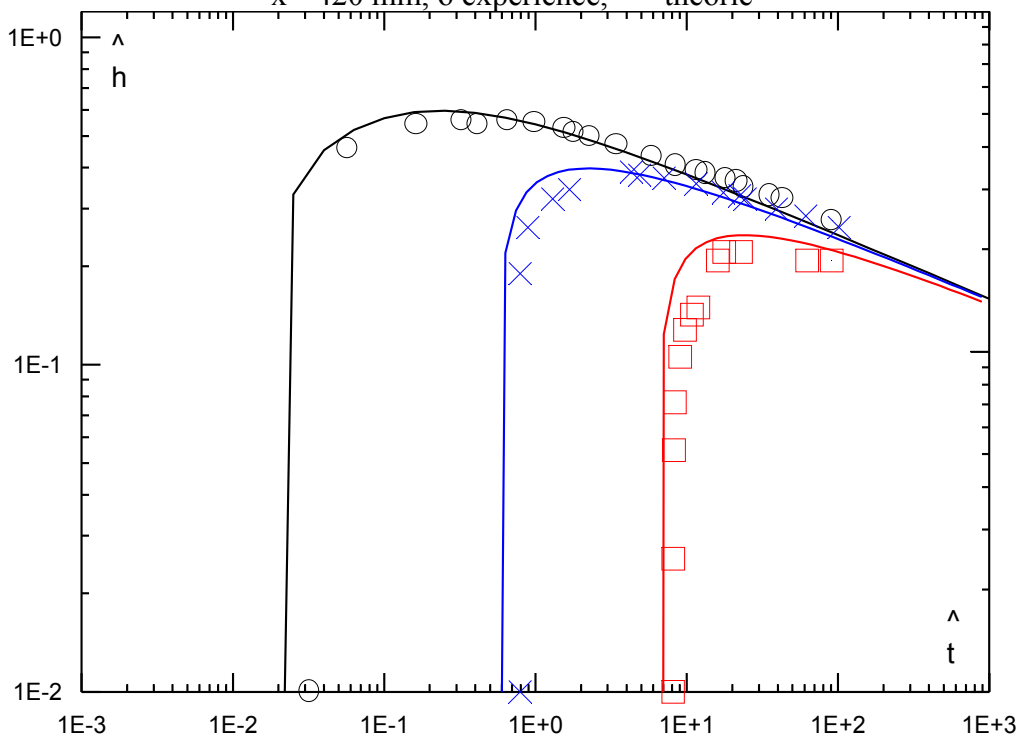


Figure 26 : Comparaison expérience-théorie de quelques hydrographes de hauteurs dans des stations situées en aval; fond horizontal ; variables adimensionnelles ; Glus.6,  
 O  $x=60$  mm,  $\times$   $x=300$  mm,  $\square$   $x=760$  mm, — théorie

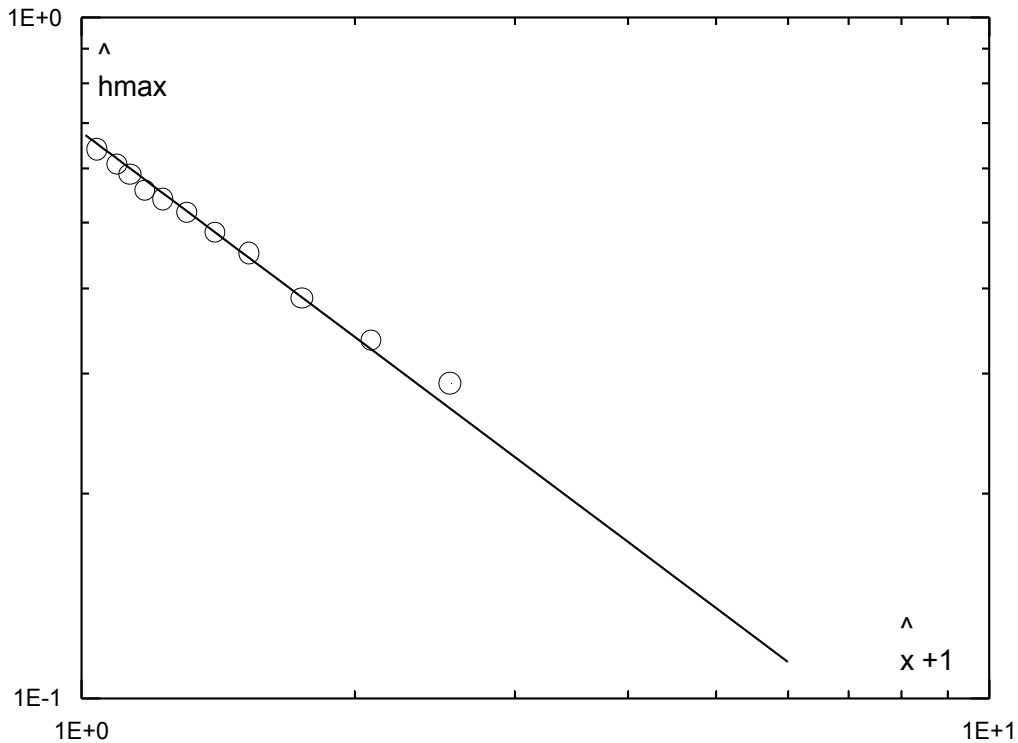


Figure 27 : Comparaison expérience-théorie des hauteurs maximales en fonction de l'abscisse ; fond horizontal ; variables adimensionnelles ; Glus.9,  
O expérience, — théorie

#### I.10.4 Canal incliné

Le fond aval est toujours gardé sec et le barrage (la plaque mobile) est disposé perpendiculairement au radié. Lorsque le fluide est au repos dans le réservoir, deux conditions initiales peuvent être étudiées. Nous avons désigné la première par la condition à hauteur nulle. Assez peu de fluide est disposé dans ce cas de telle sorte que, à  $x = -L$ , la profondeur du fluide est nulle (Figure 10c). Dans la deuxième, le fluide est disposé de telle sorte que le fluide mouille la paroi amont et donc sans que la surface libre touche le fond amont du canal (Figure 10b). Nous avons alors désigné ce cas par la condition à hauteur non nulle. Nos expériences ont été réalisées avec six pentes différentes du canal (2, 3, 6, 9, 10 et 12°). Dans le Tableau 2, nous avons récapitulé l'ensemble des expériences réalisées.  $\hat{L}$  représente, tout simplement, le rapport de l'épaisseur de fluide au barrage nécessaire pour couvrir le radié à l'épaisseur initiale du fluide à l'emplacement du barrage.

L'étude expérimentale vise à déterminer l'évolution de la position du front d'onde en fonction du temps, le profil de la surface libre, les hydrographes de hauteur et les hauteurs maximales. Notons que la solution visqueuse établie pour le cas considéré n'est parfaitement justifiable que dans la phase finale de l'écoulement, i. e pour  $t$  assez grand. Ainsi, nous n'allons pas faire une comparaison assez stricte, comme dans le cas horizontal.

Tableau 2 : Différentes configurations de l'écoulement

Désignation	Viscosité $\mu$ (Pa.s)	$\alpha$ [°]	H(mm)	L(mm)	$\hat{L}$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Glus.10	40	3	30	573	$\approx 1$	1406
Glus.11		6	50	478		
Glus.12		10	60	317		
Glus.13		12	50	240		1410
Glus.14	80	6	50	478		
Glus.15	10	50	284			
Glus.16	40	2	58.6	220	0.131	1406
Glus.17	90	3	57.86	300	0.272	1410
Glus.18		9	73.76	300	0.644	
Glus.19	80	3	57.86	300	0.272	1410

Nous nous contenterons seulement d'indiquer les effets apportés par la pente du canal et de compléter les prédictions théoriques en donnant des lois semi-empiriques. Cela est rendu facile grâce à l'analyse dimensionnelle décrite précédemment où on a montré, dans le régime visqueux, que  $\hat{L}$  est le seul paramètre de l'écoulement. Les variables dimensionnelles utilisées sont indiquées par le signe  $\hat{\quad}$  et dont les expressions sont identiques au cas horizontal en utilisant  $g \cos(\alpha)$  en place de  $g$ .

Condition initiale à hauteur nulle

#### Evolution de la position du front en fonction du temps

La Figure 28 montre l'évolution de la position du front d'onde en fonction du temps, cela pour quatre différentes pentes du canal (3, 6, 10 et 12°) et avec la condition initiale à hauteur nulle. Les courbes sont représentées en variables dimensionnelles. Si la hauteur initiale dans la section du barrage est constante (Glus.11 et Glus.13), la pente du canal ne semble pas intervenir immédiatement après la rupture. Cependant, à partir d'un certain temps toutes les courbes s'écartent progressivement. On remarque dans ce cas que l'augmentation de la pente du canal n'entraîne pas explicitement une vitesse du front plus importante. En effet, la hauteur et la longueur du réservoir, donc le volume initial de fluide, ont également une influence.

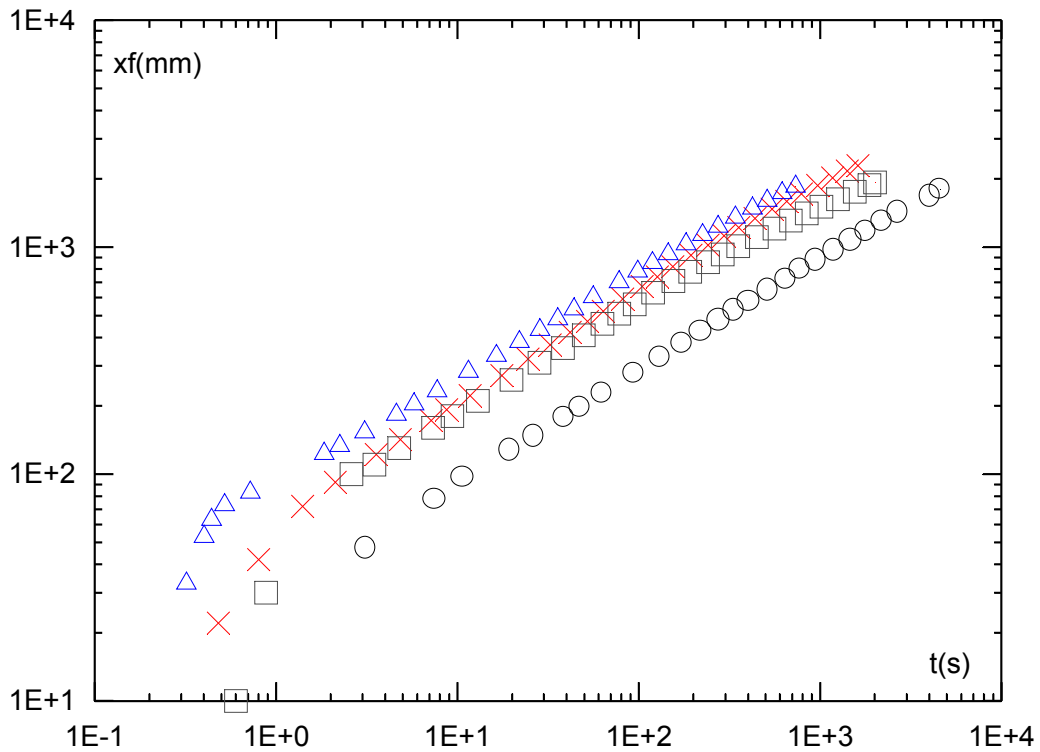


Figure 28 : Evolution de la position du front d'onde en fonction du temps ; fond incliné ( $\hat{L} = 1$ ); variables dimensionnelles, O Glus.10, x Glus.11, Δ Glus.12, □ Glus.13

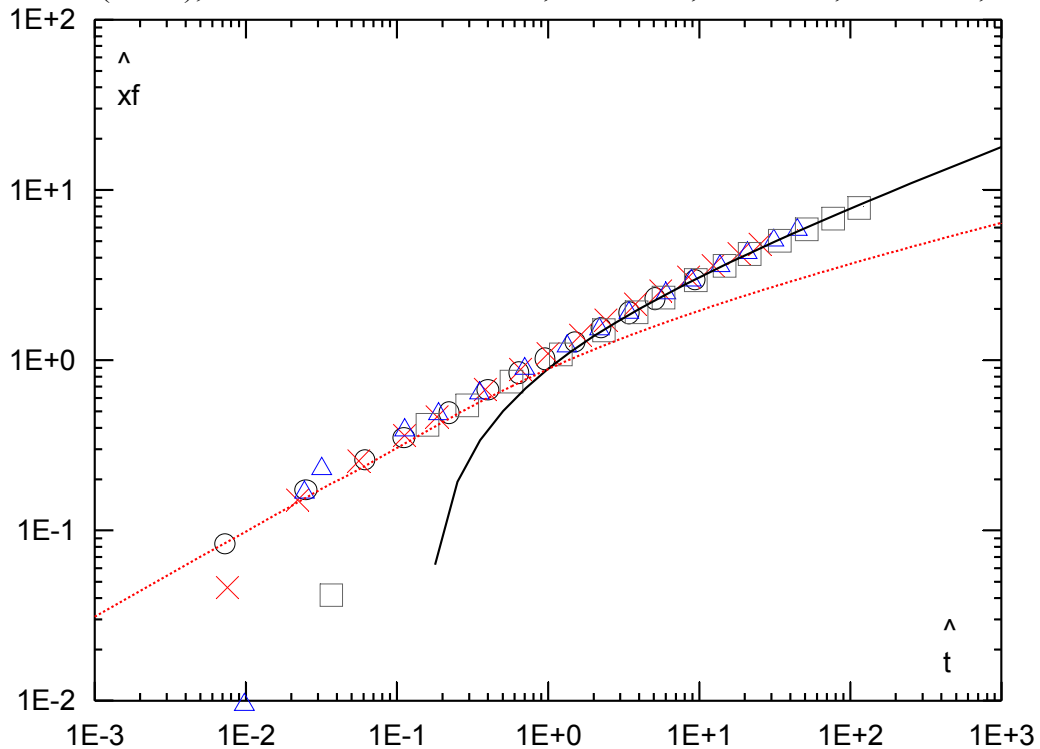


Figure 29 : Comparaison théorie-expérience de l'évolution de la position du front d'onde en fonction du temps ; fond incliné ; condition initiale à hauteur nulle ; variables adimensionnelles, O Glus.10, x Glus.11, Δ Glus.12, □ Glus.13, — théorie d'onde cinématique, - - - théorie visqueuse (canal horizontal)

La Figure 28 est retracée en variables adimensionnelles sur la Figure 29. En faisant abstraction des premiers instants après la rupture de barrage, les quatre différentes configurations de l'écoulement se superposent sur une courbe unique. Cela justifie une fois de plus, le bon choix des variables adimensionnelles et le modèle d'écoulement. Dans cette même figure, la théorie d'onde cinématique a été tracée. Elle fournit un accord satisfaisant, mais seulement pour  $\hat{t}$  assez grand. Pour  $\hat{t}$  petit, l'écoulement est plutôt proche au cas horizontal, car la théorie visqueuse (canal horizontal) représente mieux dans ce cas les mesures. Notons que dans la phase initiale où le régime est principalement inertiel, l'écoulement est affecté par les mêmes causes d'erreurs que dans le cas horizontal, i.e par les perturbations provoquées par la levée du barrage et la non répartition hydrostatique de la pression.

### Profil de la surface libre

La figures (Figure 30, Figure 31) montrent l'évolution du profil de la surface libre, cela respectivement pour  $\alpha = 6^\circ$  et  $10^\circ$ .

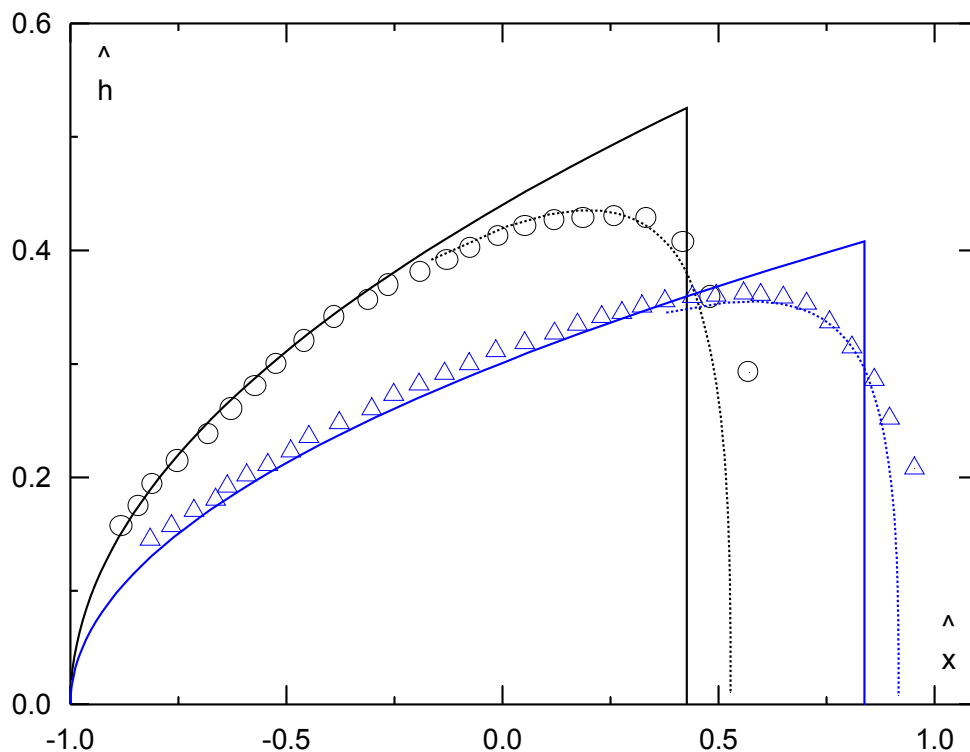


Figure 30 : Comparaison théorie-expérience du profil de l'écoulement ; Glus.14 ; fond incliné ; condition initiale à hauteur nulle ; variables adimensionnelles,  $\circ t = 54.5$  s,  $\Delta t = 117$  s, — théorie d'onde cinématique, - - - théorie (solution composite) Les mesures sont comparées aux calculs théoriques (solution d'onde cinématique et solution composite). L'accord est donc satisfaisant, de plus on peut observer que la solution composite apporte effectivement une amélioration à la solution d'onde cinématique. Il faut cependant

signaler que les temps choisis ici sont assez importants pour être en accord avec les hypothèses de la théorie.

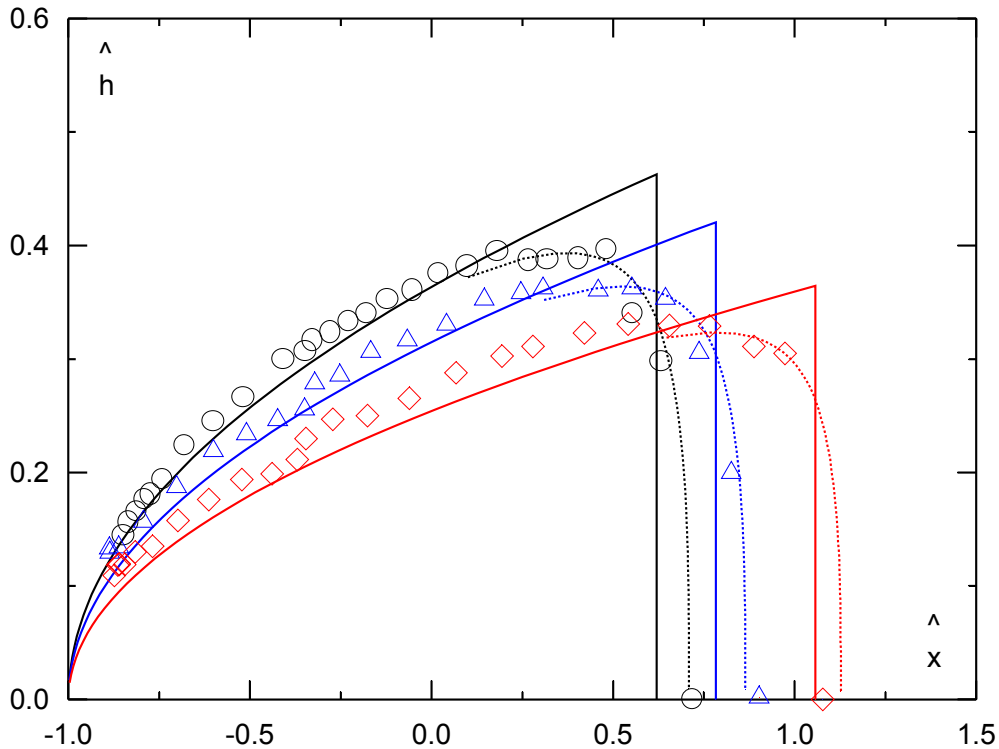


Figure 31 : Comparaison théorie-expérience du profil de l'écoulement ; Glus.15 ; fond incliné ; condition initiale à hauteur nulle ; variables adimensionnelles,  $\diamond$   $t = 49.2$  s,  $\circ$   $t = 24.51$  s,  $\triangle$   $t = 32.3$  s, — théorie d'onde cinématique, - - - théorie (solution composite)

#### hydrographe de hauteur et hauteurs maximales

Les hydrographes de hauteurs dans les sections  $x=60$  et  $408$  mm sont représentés sur la Figure 32. Ces mesures sont comparées aux prédictions de la théorie d'onde cinématique. L'accord est meilleur dans les stations situées assez loin du barrage. L'influence de l'histoire de l'écoulement devient dans ce cas négligeable.

Enfin, on représente sur la Figure 34, la variation de hauteurs maximales en fonction de l'abscisse, cela pour deux pentes du canal,  $6^\circ$  et  $10^\circ$ . La superposition entre les deux courbes, est assez bonne, confirmant ainsi notre prédiction théorique. Malheureusement, il n'existe pas une solution stricte derrière ces mesures. En revanche, on propose la loi semi-empirique suivante:

$$\hat{h}_{\max} = 0.553(\hat{x} + 1)^{-0.8}$$

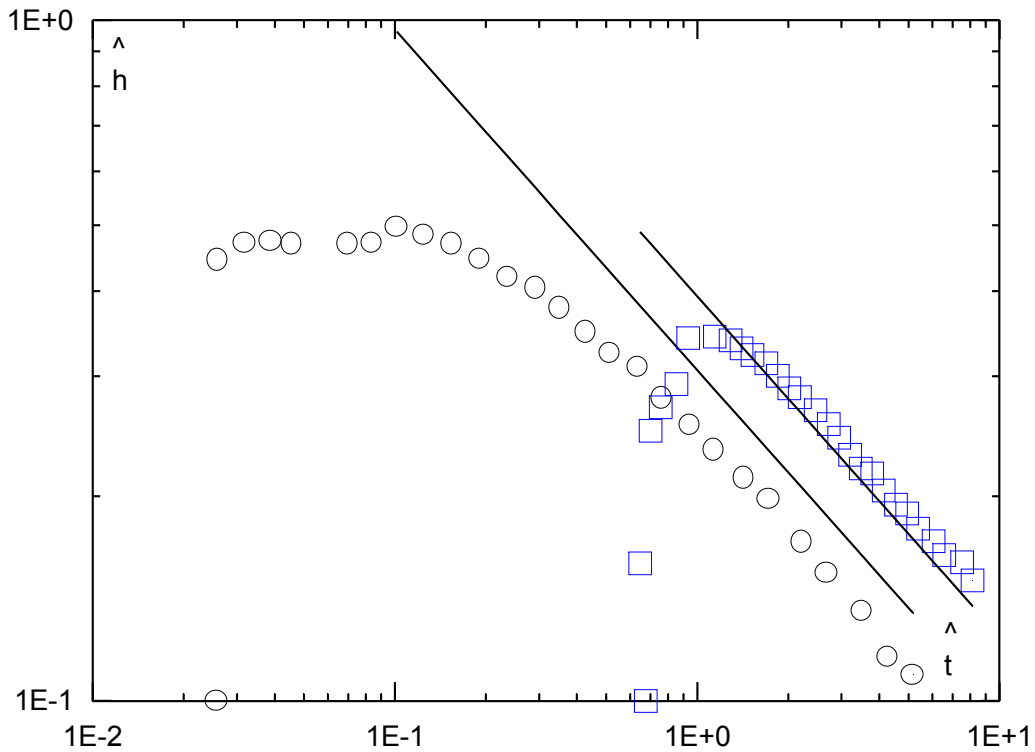


Figure 32 : Comparaison expérience-théorie d'un hydrographe de hauteurs dans une station située en aval ;  $x=60$  mm ; Glus.14 ; fond incliné ; condition initiale à hauteur nulle ; variables adimensionnelles,  $\circ$   $x=60$  mm,  $\square$   $x=408$  mm, — théorie d'onde cinématique

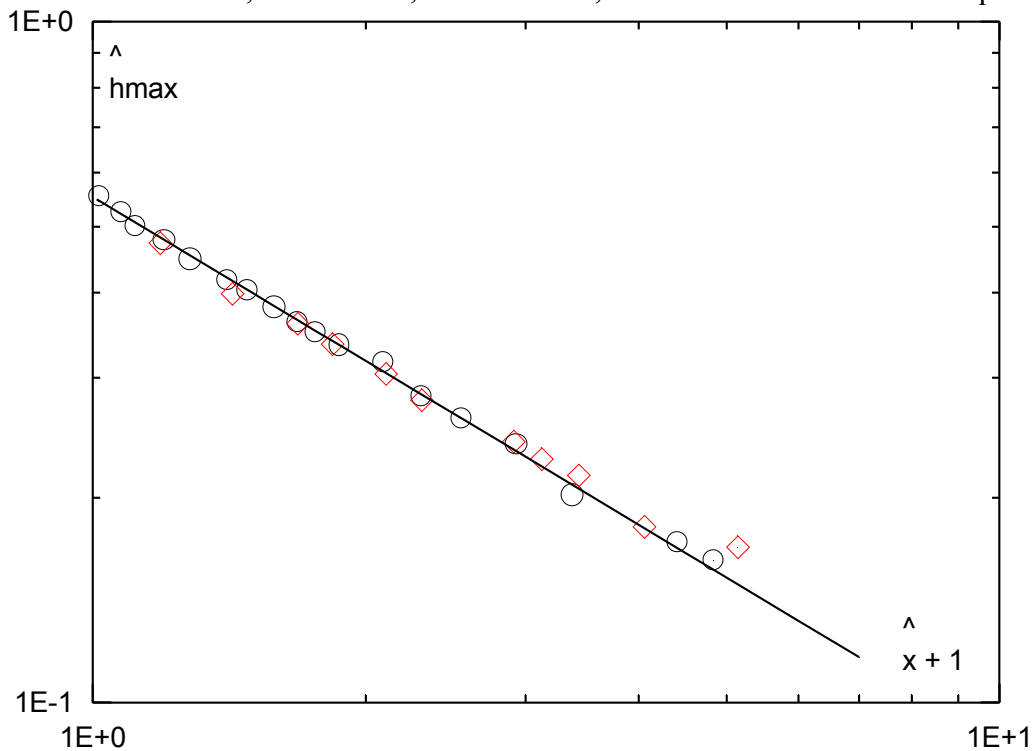


Figure 33 : Hauteurs maximales en fonction de l'abscisse ; fond incliné ; condition initiale à hauteur nulle ; variables adimensionnelles, — Courbe ajustée,  $\circ$  Glus.14,  $\diamond$  Glus.15

#### Condition initiale à hauteur non nulle

Signalons d'abord que la caractérisation complète des lois d'écoulement avec cette

condition initiale nécessite un nombre important d'essais en faisant varier chaque fois la valeur du paramètre adimensionnel  $\hat{L}$ . Pour pouvoir répondre à quelques unes de nos préoccupations, nous avons réalisé trois séries d'expériences avec  $\hat{L} = 0.131, 0.272$  et  $0.644$ .

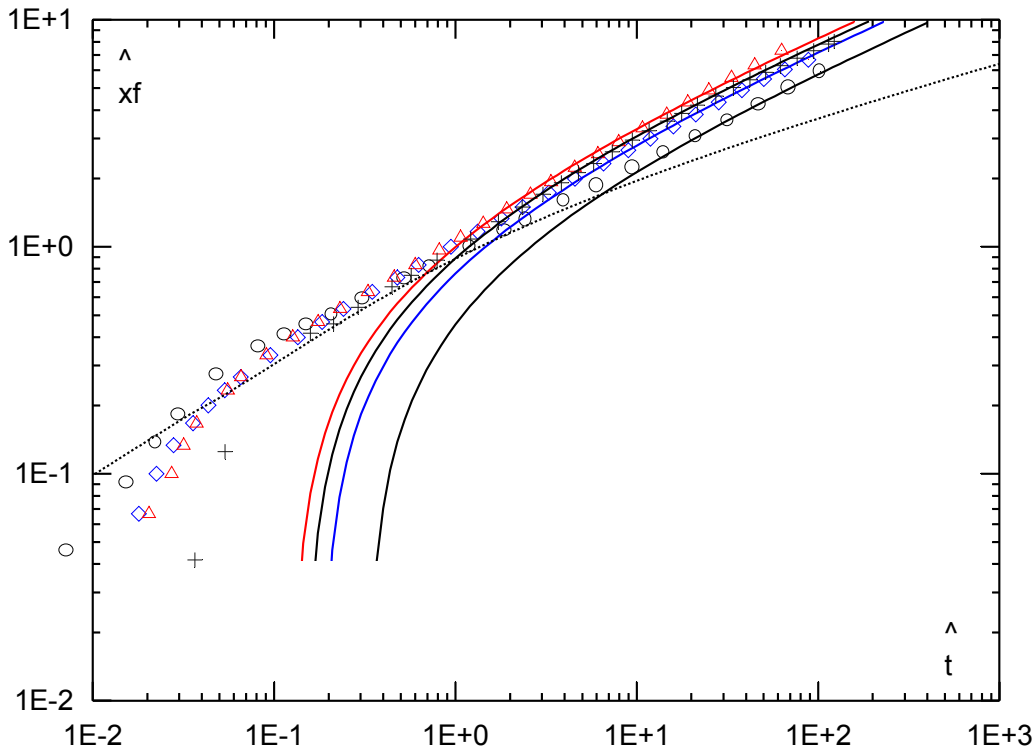


Figure 34 : Comparaison expérience-théorie de l'évolution du front d'onde en fonction du temps : influence de  $\hat{L}$  ; fond incliné ; variables dimensionnelles,  
 O Glus.16,  $\diamond$  Glus.17,  $\Delta$  Glus.18, + Glus.13,  
 — théorie d'onde cinématique, - - - théorie visqueuse (canal horizontal)

#### Evolution de la position du front en fonction du temps

Sur la Figure 34 on représente les mesures de l'évolution de la position du front au cours du temps. Nous avons calculé, puis tracé dans la même figure à la fois la solution d'onde cinématique et la solution déduite du cas horizontal. Aux temps petits, l'abscisse du front d'onde se comporte donc bien comme dans le cas horizontal. L'effet de la pente apparaît aux temps grands où l'hypothèse d'onde cinématique devient parfaitement vérifiable.

#### Profil de la surface libre

D'autre part, la Figure 35 montre la variation du profil de l'écoulement en fonction du temps, cela pour  $\alpha = 3^\circ$ . On peut distinguer deux phases de l'écoulement. La première phase est caractérisée par une variation graduelle de la profondeur du fluide au bord amont du canal. La deuxième phase commence lorsque à cet endroit la profondeur approche la valeur nulle.



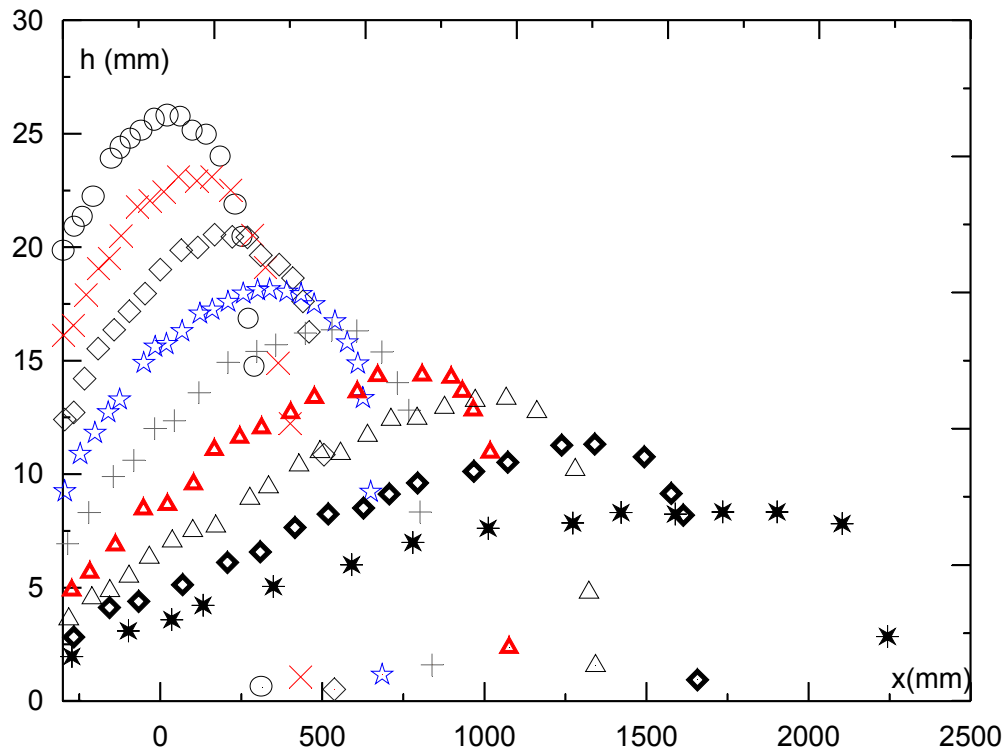


Figure 35 : Evolution du profil de la surface libre en fonction du temps ; Glus.19 ; fond incliné ( $\hat{L} = 0.272$ ) ; variables dimensionnelles, o  $t=229$  s,  $\times t=51$  s,  $\diamond t=89$  s,  $\star t=119$  s,  $\blacktriangle t=253$  s,  $+ t=460$  s,  $\triangle t=780$  s,  $\blacklozenge t=1272$  s,  $\ast t=2794$  s

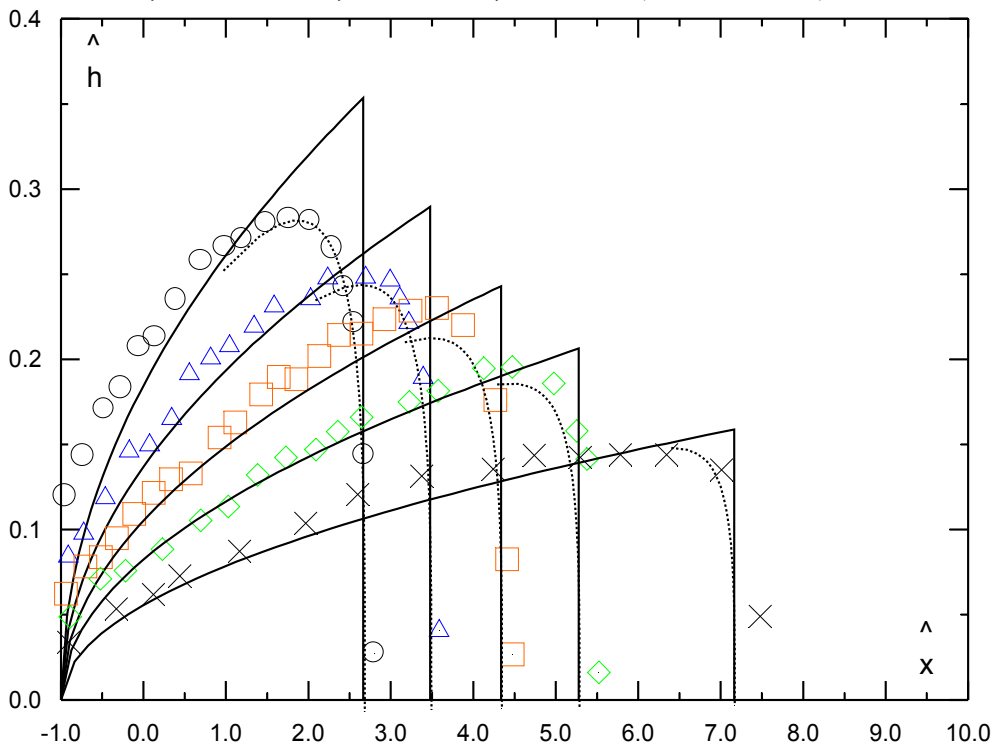


Figure 36 : Comparaison théorie-expérience de quelques profils de l'écoulement Glus.19 ; fond incliné ; condition initiale à hauteur non nulle ; variables adimensionnelles,

$$o \hat{t} = 9, \Delta \hat{t} = 16.4, \hat{t} = 27.7, \diamond \hat{t} = 45.2,$$

— théorie d'onde cinématique, - - - - théorie (solution composite)

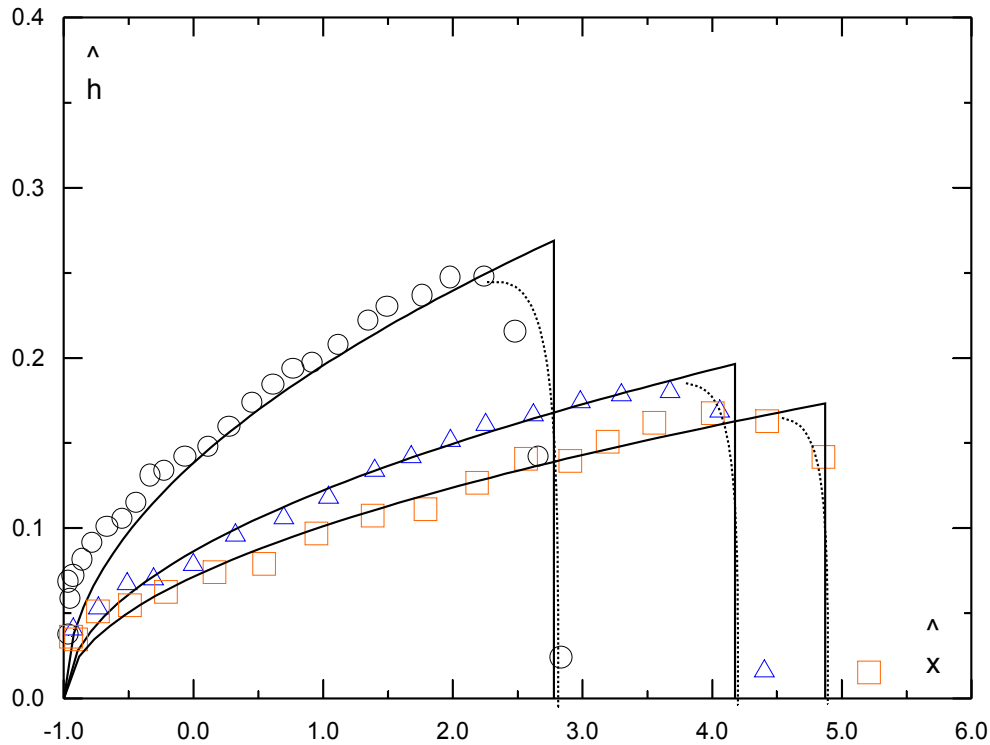


Figure 37: Comparaison théorie-expérience de quelques profils de l'écoulement Glus.18 ; fond incliné ; condition initiale à hauteur non nulle ; variables adimensionnelles,

$$\circ \hat{t} = 6.8, \Delta \hat{t} = 17.3, \quad \hat{t} = 25.3,$$

— théorie d'onde cinématique, - - - - théorie (solution composite)

Quelques mesures des profils de l'écoulement sont comparées à la théorie d'onde cinématique dans les figures (Figure 36, Figure 37). Pour rester dans le cadre de nos hypothèses de calcul, nous avons choisi des temps assez grands où la profondeur de l'écoulement au bord amont du canal devient quasi-nulle. Dans ces conditions, on obtient un accord expérience/théorie satisfaisant.

### hydrographe de hauteur et hauteurs maximales

Les mesures des hydrographes dans des stations situées en amont sont présentées sur la Figure 38. Pour évaluer la profondeur du fluide au bord amont, on propose aux temps relativement grands d'utiliser la formule empirique suivante :

$$\hat{h}(x = -L, \hat{t}) \approx 1 - 0.611 \hat{t}^{0.1} \quad \hat{t} \gg 1$$

La Figure 39 représente des hydrographes dans des stations situées en aval. Les courbes sont comparées à la théorie d'onde cinématique. L'accord est meilleur aux temps grands.

Enfin, on représente sur la Figure 40 les mesures de hauteur maximale en fonction de l'abscisse. On peut remarquer l'existence d'un point particulier qui sépare deux régimes : Le premier est analogue au cas horizontal, i. e :

$$\hat{h}_{\max}(\hat{x}) \approx 0.679 (\hat{x} + 1)^{-1} \quad \text{pour } \hat{x} \ll 1$$

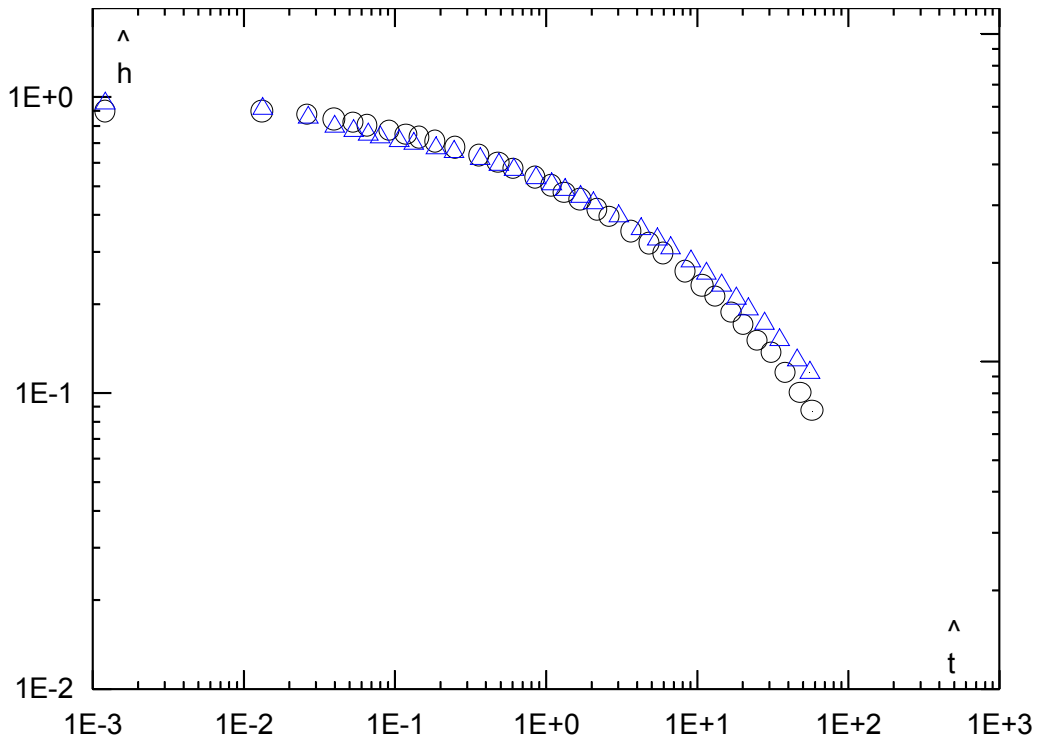


Figure 38 : Hydrographes de hauteurs : Stations amont ; Glus.16 ; fond incliné ; condition initiale à hauteur non nulle ; variables adimensionnelles,  
 $\circ x = -170 \text{ mm}$ ,  $\Delta x = -65 \text{ mm}$

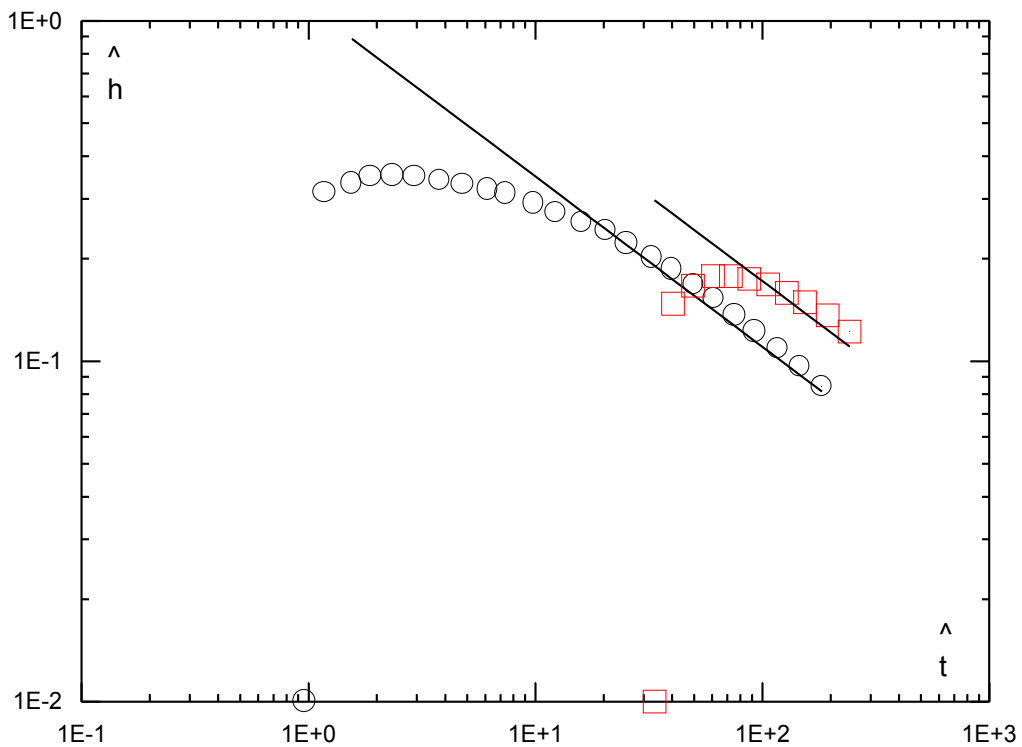


Figure 39 : Comparaison théorie-expérience de d'un hydrographe de hauteurs : Stations aval ; Glus.16 ; fond incliné ; condition initiale à hauteur non nulle ; variables adimensionnelles,  
 $\circ \hat{x} = 0.909$ ,  $\hat{x} = 3.64$

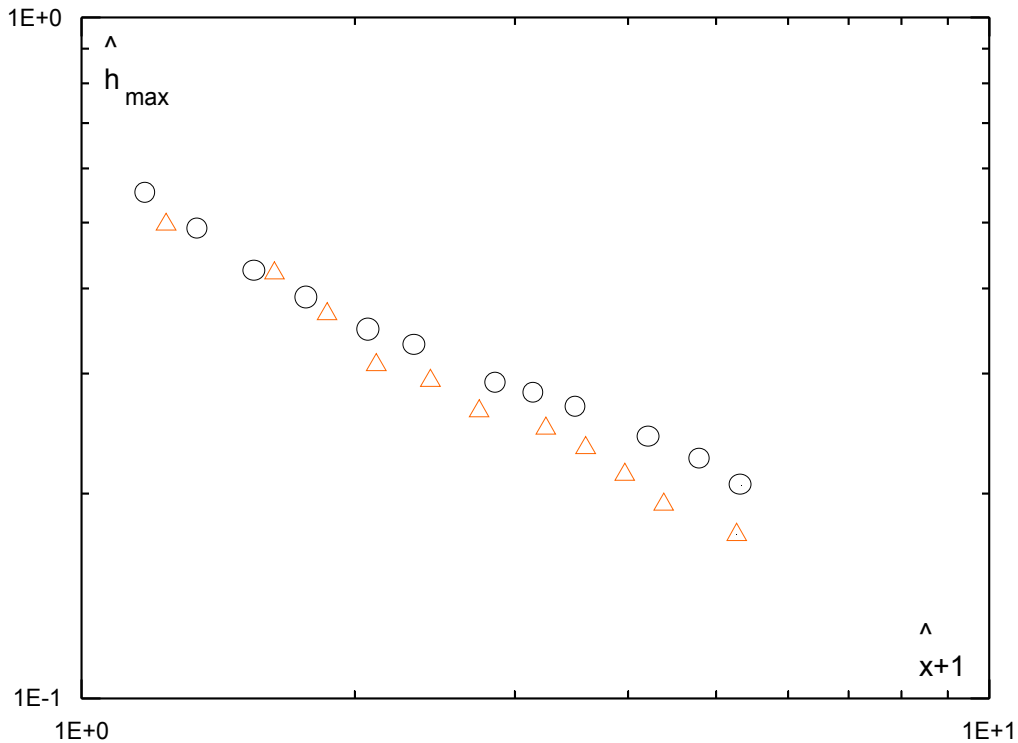


Figure 40 : Hauteur maximale en fonction de l'abscisse ; fond incliné ; condition initiale à hauteur non nulle ; variables adimensionnelles,  
O Glus.19, Δ Glus.18

Le deuxième régime est plus proche à la loi obtenue avec la condition initiale à hauteur nulle, donc :

$$\hat{h}_{\max} = c_{\max}(\hat{L})(\hat{x} + 1)^{-0.8} \quad \text{pour } \hat{x} \gg 1$$

avec  $c_{\max}(\hat{L}) \approx 0.553 \hat{L}^{1/4}$ .

## I.11 Conclusion

L'objectif visé par ce chapitre est double : d'une part compléter les connaissances déjà acquises dans le problème de rupture de barrage avec des fluides ayant un comportement Newtonien mais très visqueux ; d'autre part programmer une base d'étude saine permettant d'aborder aisément le même problème avec des fluides plus complexes. Notre souhait c'est de mieux comprendre les écoulements géologiques qui se produisent dans la nature et de donner également aux industriels des formules analytiques simples qui permettent une meilleure exploitation de leurs données consistométriques des fluides très visqueux impliqués dans de multiples domaines. Nous avons considéré d'abord le cas horizontal, puis le cas incliné.

Dans le cas horizontal, des solutions analytiques ont été obtenues suivant trois régimes d'écoulement : un régime essentiellement inertiel, immédiatement après la rupture ; un premier régime visqueux, juste après ; et enfin un dernier régime d'écoulement qui est également visqueux. Ces solutions sont assez simples pour que le technicien puisse les

exploiter.

Dans le cas incliné, on a proposé, à partir d'une analyse dimensionnelle, d'étudier la phase visqueuse de l'écoulement en fonction d'un seul paramètre adimensionnel ( $\hat{L}$ ). Ce paramètre dépend de la condition initiale de l'écoulement et il est lié à la pente du canal, la longueur du réservoir et la hauteur initiale du fluide à l'emplacement du barrage. Ce paramètre adimensionnel varie de 0 pour un canal horizontal, à 1 pour la condition initiale à hauteur nulle. Pour donner une solution asymptotique du problème, on a fait appel à la stratégie utilisée par Hunt. Les résultats analytiques obtenus à partir de cette analyse ont été complétés par des formules semi-empiriques basées principalement sur des constats expérimentaux, comme le fait que dans la phase initiale de l'écoulement, l'abscisse du front varie comme dans le cas horizontal.

Le fluide de comportement Newtonien qu'on a testé est une solution d'eau et de Glucose de viscosité élevée. Les résultats obtenus avec cette solution confirment l'intérêt de des relations analytiques et indiquent leurs domaines d'application. L'ingénieur peut donc adopter notre analyse pour résoudre d'autres problèmes, comme le cas d'une rupture sur fond mouillé, avec d'autres formes de la section transversale et aussi bien dans des canaux non prismatiques. Cependant, il faut signaler que des améliorations peuvent être apportées à nos relations, notamment une meilleure représentation des différentes transitions de l'écoulement et une prise en compte, dans le premier régime d'écoulement, où l'inertie n'est pas négligeable, de la longueur finie du réservoir. Il vaut mieux dans ce cas utiliser des moyens numériques car à l'heure actuelle très peu d'analyses analytiques existent.

## Bibliographie

- Abbott, M.B (1974) Continuous flows, discontinuous flows and numerical analysis, J. Hydraul. Res., **12**(4) ; 417-467.
- Alam, M.M., Bhuiyan, M. A. (1995) Collocation finite-element simulation of dam-break flows, J. Hydr. Engrg, **121**(2), 118-128.
- Aguirre-PE, J., Plachco, F. P., Quisca, S., (1995) Test and numerical one-dimensional modeling of a high-viscosity, J. Hydraul. Res., **33**(1) ; 17-26.
- Ayadi A., (1996) Ecoulement à surface libre des boues argileuses, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble I
- Balloffet, A., Cole, E., Balloffet, A. F. (1974) Dam collapse wave in a river, J. of Hydraul Eng, 1974; **100**(HY5), 645-665.
- Bell, S. W., Elliot R. C., Ghaudhry M. H. (1992) Experimental results of two-dimensional investigation dam-break flows, J. Hydraul. Res., **30**(2) ; 225-252.

- Bellos, C.V., Sakkas, J. G. (1987) 1-D dam-break flood-wave propagation on dry bed, *J. Hydr. Engrg*, **113**(12), 1510-1524.
- Bellos, C. V., Soulis J. V., Sakkas, J. G. (1992) Experimental investigation of two-dimensional dam-break induced flows, *J. Hydraul. Res.*, **30**(1) ; 47-63.
- Bird, R. B., Gange, D., Yarusso, B. J. 1983 The rheology and flow of viscoplastic materials. *Rev. Chem. Eng.* 1, 1-70.
- Capart, H., Young D.L. (1998) Formation of jump by the dam-break wave over a granular bed. *J. Fluid Mech*, **372**, 165-187.
- Cavaillé. Y. (1965) Contribution à l'étude de l'écoulement variable accompagnant la vidange brusque d'une retenue, *Publ. Sc. Et Tech. Du ministère de l'air*, n°**410**.
- Chen, C., (1980) Laboratory verification of a dam-break flood model, *J. Hydr. Div*, **106**(4), 535-556.
- Chen, C., and Armbruster, J. T. (1980) Dam-break wave model: Formulation and verification, *J. Hydr. Div*, **106**(5) ; 747-767.
- Coussot, P (1992) Rhéologie des boues et laves torrentielles étude de dispersions et suspensions concentrées, Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble
- Cooley, R. L., Moin, S. A. (1976) Finite element solution of Saint-Venant equation, *J. of Hydraul Eng*, 1994; **102**(HY6), 759-775
- Cunge, J. A. (1970) Calcul de propagation des ondes de rupture de barrage, *La Houille Blanche*, 1
- De Saint-Venant, B. (1871) Théorie du mouvement non permanent des eaux. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 73, 237.
- Dressler, R.F. (1952) Hydraulic resistance effects upon the dam break functions . *Journal of Research of the National Bureau of Standards*. **49**(3):217.
- Dressler, R.F. (1954) Comparison of theories and experiments for hydraulic dam-break wave, *Int. Assoc. Sci. Pubs*, **3**(28), 319-328.
- Elliot, R. C., Ghaudhry, M.H. (1992) A wave propagation model for two-dimensional dam-break flows, *J. Hydraul. Res.*, **30**(4) ; 467-483.
- Estrade J. (1967) Contribution à l'étude de la suppression d'un barrage. Phase initiale de l'écoulement, *Bulletin de la direction des études et recherches. Série A*, N°1
- Faure, J., and Nahas, N. (1961) Etude numérique et expérimentale d'intumescences à forte courbure du front. *La Houille Blanche*, 5:576.
- Fennema, A.J., and Ghaudhry, M. H. (1989) Implicit methods for two-dimensional unsteady free-surface flows, *J. Hydraul. Res.*, **27**(3) ; 321-332.
- Fennema, A.J., and Ghaudhry, M. H. (1995) Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problem, *J. Hydraul. Res.*, **33**(6) ; 843-864.
- Fraccarollo, L., and Toro, E. F., (1987) Simulation of one-dimensional dam-break flows, *J. Hydraul. Res.*, **25**(1) ; 41-51.

- Fread, D. L., and Harbaugh, T. E. (1973) Transient hydraulic simulation of breached earth dams, *J. Hydraul. Eng.*, **99**(HY1), 139-154.
- Glaister, P. (1989) Approximation Riemann solution of the two-dimensional shallow-water equations, *Journal of Engineering Mathematics* **24**, 45-53.
- Glaister, P. (1993) Flux difference splitting for open-channel flows, *Int. j. numer. Methods fluids*, **16**, 629-654
- Gozali, S., Hunt, B. (1993) Dam-break solutions for hydraulic research, *J. Hydraul. Res.*, **31**(2), 205-214.
- Hicks, F. E., Steffler, P. M., Yasmin., N. (1997) One-dimensional dam-break solutions for variable width channels, *J. Hydraul. Eng.*, **123**(5), 464-468.
- Hunt B. (1982) Asymptotic solution for the dam break problem. *Journal of the Hydraulic Division, ASCE.* **108**:115
- Hunt, B. (1983) Asymptotic problem for the dam break problem on sloping channel. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE.* **109**:1698
- Hunt, B. (1983) Perturbation solution for dam break floods. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE.* **110** ; 1058
- Hunt, B. (1994) Newtonian fluid Mechanics treatment of debris flows and avalanches, *J. of Hydraul Eng.*, **120**(12); 1363
- Huppert, H. E (1982) The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over rigid horizontal surface. *J. Fluid Mech*, **121**, 43-58.
- Huppert, H. E (1986) The intrusion of fluid mechanics into geology. *J. Fluid Mech*, **173**, 557-594.
- Jha, A. K., Akiyama, J., Ura M. (1995) First-and second-order flux difference splitting schemes for dam-break problem, *J. Hydraul. Eng.*, **121**(12), 877-884.
- Katapodes, N. D. (1984) Two-dimensional surges and shocks in open, *J. Hydraul. Eng.*, **110**(6), 794-812.
- Katapodes, N. D. and Chamber, D. R. (1983) Application of dam-break flood wave models, *J. Hydraul. Eng.*, **109**(5), 702-721.
- Katapodes, N. D. and Strelkoff, T. (1978) Computing two-dimensional dam-break flood waves, *J. Hydr. Div.*, **99**(12), 2195-2216.
- Katapodes, N. D., Wu, C. T. (1986) Explicit Computation of discontinuous channel flow, *J. Hydraul. Eng.*, **104**(9), 1269-1288.
- Lang, T.E., Dent, J. D. (1987) Kinematic properties of mudflow on Mt. St. Helens, *J. Hydr. Engrg.*, **113**(5), 646-660.
- Lévin, L. (1952) Mouvement non permanent sur les cours d'eau à la suite de rupture de barrage, *Revue générale de l'hydraulique*, **3** (72); 297-315
- Miller, S., Ghaudhry, M. H. (1989) Dam-break flows in curved channel, *J. Hydr. Engrg.*, **115**(11), 1465-1478.
- Mohapatra, P. K., Eswaran, V., Bhallamudi, S. M. (1999) Two-dimensional analysis of dam-break flow in vertical plane, *J. Hydr. Engrg.*, **125**(2), 183-192.

- O'Brien, J. S., and Julien, P. Y., (1988) Laboratory analysis of mudflows properties, *Journal of Hydraulic Engineering*, **114** (8), 877-887.
- Paquier, A, Robin, O., (1995) Une méthode simple pour le calcul des ondes de rupture de barrage, *La Houille Blanche* 8
- Piau, J.M. (1996) Flow of a yield stress fluid in a long domain. Application to flow on an inclined plane, *Journal of Rheology*, **40**(4):711.
- Pohle F.V. (1952) Abstract of above. Symposium of gravity Waves, Nat. Bur. of Stand., Circular **521**; 17-53
- Rajar, R. D. (1978) Mathematical simulation of a dam break-break flow, *J. Hydr. Div*, **104**(7), 1011-1026.
- Ritter, A. (1892) Die Fortpflanzung der Wasser Wellen, *Z. des Ver. Deutsch Ing*; **36**(33):947
- Sakkas, J.G., and Strekoff, R. (1973) Dam break flood in a prismatic dry channel, *J. Hydr. Div*, **99**(12), 2195-2216.
- Sakkas, J.G., and Strekoff, R. (1976) Dimensionless solution of dam-break flood waves, *J. Hydr. Div*, **102**(HY2), 171-184.
- Schamber, D. R., and Katapodes, N. D. (1984) One-dimensional models for partially breached dam, *J. hydraul. Eng*, **110**(8), 1086-1102.
- Schoklitsch A. (1917) Über Damnbruchwellen, *Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften*, **126**; 1489-1514
- Sousa, J., and Hutter, K. (1991) Continuum simulation of flow failures, *Geotechnique*, Vol. XLI (4); 515-538.
- Strekoff T., and Katapodes, N. (1984) End depth under zero-inertia, *J. hydraul. Eng*, **103**(HY7), 699-711.
- Stansby, P. K., Chegini, A., Barnes T. C. D. (1998) Dam break flood in a prismatic dry channel. *J. Fluid Mech*, **370**, 203-220.
- Stoker, J. J. (1957) *Water waves*, Interscience Publishers, Wiley, New York, 1957.
- Soulis, J. V. (1992) Computation of two-dimensional dam-break flood flows. *Int. j. numer. Methods fluids*, **14**(6), 631-664.
- Su, S., and Barnes, A.H. (1970) Geometric and frictional effects on sudden releases, *J. Hydr. Div*, **96**:2185.
- Townson, J. M., Al-Salihi, A.H () Models of dam-break flows in R-T space, *J. hydraul. Eng*, **115**(5), 561-575.
- Trunk, F. J., Dent, J. D., and Lang, T. E. (1986) Computer modelling of large rock slides, *J. Geotech. Engrg., ASCE*, **112**, 348-360.
- US Army Corps of Engineers, (1960-1961) *Floods Resulting from Suddenly Breached Dams-Condition of Minimum Resistance*. Misc. Paper 2-374, Report 1, Waterways Experimental Station, Vicksburg, Mississippi
- Utracki, L. A. 1988. *The rheology of two phase flows*. In *rheological measurement*, ed. A. A. Collyer, D. W. Clegg, 479-594. London: Elsevier.



- Whitham, G. B. (1954) The effects of hydraulic resistance in dam break problems. Proceedings of the Royal Society of London, A(227): 399.
- Wu, Chao., DAI, G., Wu, Chigong. (1993) Model of dam-break floods for channels of arbitrary cross section, J. hydraul. Eng, **119**(8), 911–923.
- Xanthopoulos, T., and Koutitas, C. (1976) Numerical solution of Saint-Venant equations, J. Hydraul. Res, **14**(4), 321-331.
- Yang J. Y., Hsu C. A., Chang S. H. (1993) Computations of free surface flows. I: One-dimensional dam-break flow, J. Hydraul. Res, **31**(1), 19-34.
- Zhang, H., Youssef, H., Long, N.D., Kahawita, R. (1992) A 11-D numerical model applied to dam-break flows on dry be, J. Hydraul. Res., **30**(2), 211-224

## Annexe

### Canal Horizontal «Solution d'ordre 0 ( $\varepsilon^2$ )»

Il convient d'abord de vérifier que le régime d'écoulement est laminaire

$$H < \left( \frac{27 Re_c}{8\rho\sqrt{g}} \right)^{2/3} \quad \text{avec} \quad Re_c \approx 500$$

Les variables adimensionnelles sont :

$$\left( \hat{h}, \hat{x}, \hat{t}, \hat{U}, \hat{x}_f \right) = \left( \frac{h}{H}, \frac{x}{L}, \frac{\rho g H^3}{12\mu L^2} t, \frac{12\mu L^2}{\rho g H^3} U, \frac{x_f}{L} \right); \quad Re = \frac{\rho H \sqrt{gH}}{\mu} \frac{H}{L}$$

#### 1/ Premier régime d'écoulement (principalement inertiel)

$$\hat{t} < 5.438 10^{-3} Re^2$$

$$\eta = 2 - \frac{Re \hat{x}}{12 \hat{t}}$$

La position de l'onde négative est  $\hat{x}_b(\hat{t}) = -(12/Re)\hat{t}$  (Ritter), tandis que la position du front d'onde est :

$$x_f \approx \left( \frac{12}{Re} \right) \left( 2 - 5.851 \left( 1 - 0.739 \left( \frac{\hat{t}}{Re^2} \right)^{1/5} \right) \left( \frac{\hat{t}}{Re^2} \right)^{1/5} \right) \hat{t}$$

Loin du front d'onde ( $x \leq x_f$ ), le profil de vitesse et le profil de la surface libre sont donnés par :

$$U^*(x^*, t^*) \approx 2 - \frac{2}{3}\eta + \frac{36}{Re^2} U_1(\eta) \hat{t} + \dots$$

$$h^*(x^*, t^*) \approx \left( \frac{1}{3}\eta + \frac{36}{Re^2} C_1(\eta) \hat{t} + \dots \right)^2$$

où

$$U_1(\eta) = -\frac{324c_0}{11}\eta^{-4} + 21\eta^{-3} + \frac{10c_1}{7}\eta^{3/2}; \quad C_1(\eta) = \frac{81c_0}{22}\eta^{-4} - \frac{3}{2}\eta^{-3} + c_1\eta^{3/2}$$

$$c_0 = 2; \quad c_1 = -(7\sqrt{3})/1782$$

et

$$x_f \approx \left( \frac{12}{Re} \right) \left( 2 - 6.621 \left( 1 - 0.41 \left( \frac{\hat{t}}{Re^2} \right)^{1/5} \right) \left( \frac{\hat{t}}{Re^2} \right)^{1/5} \right) \hat{t}$$

Dans la région frontale ( $x \geq x_f$ ), le profil de vitesse et le profil de la surface libre sont :

$$\hat{U}(\eta, \hat{t}) \approx U_0(\hat{t}) + \dots$$

$$\hat{h}(\eta, \hat{t}) \approx \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} \left[ \frac{12}{\text{Re}} U_0(\hat{t})(\eta - \eta_f) + \dots \right]^{1/3}$$

où

$$U_0(\hat{t}) = \frac{d\hat{x}_f}{d\hat{t}}$$

### 1/ Premier régime visqueux

$$\hat{t} < 0.037 + 0.00432 \text{Re}^2$$

$$\eta = \frac{\hat{x}}{\hat{x}_f(\hat{t})}$$

La position de l'onde négative ( $\hat{h} = 0.99$ ) est donnée par

$$\hat{x}_b(\hat{t}) \approx -5.376(\hat{t} - 0.00432 \text{Re}^2)^{1/2}$$

La position du front d'onde est

$$\hat{x}_f(\hat{t}) \approx 0.985(\hat{t} - 0.00432 \text{Re}^2)^{1/2}$$

Entre ces deux extrémités le profil de vitesse et le profil de la surface libre sont

$$\hat{U}(\eta, \hat{t}) \approx \frac{0.485}{\hat{x}_f} \left[ 1 - \frac{1}{4}(1-\eta) + \frac{3}{224}(1-\eta)^2 + \frac{3}{4480}(1-\eta)^3 + \dots \right]$$

$$\hat{h}(\eta, \hat{t}) \approx 0.714 \left[ (1-\eta) - \frac{1}{8}(1-\eta)^2 + \frac{1}{224}(1-\eta)^3 + \frac{3}{17920}(1-\eta)^4 + \dots \right]^{1/3}$$

### 3/ Deuxième régime visqueux

$$\hat{t} > 0.037 + 0.00432 \text{Re}^2$$

$$\eta = \frac{\hat{x} + 1}{\hat{x}_f(\hat{t}) + 1}$$

La position du front d'onde est donnée par

$$\hat{x}_f(\hat{t}) \approx 1.862 \left[ \hat{t} + 0.069 - 0.00432 \text{Re}^2 \right]^{1/5} - 1$$

Entre  $\hat{x} = -1$  et  $\hat{x} = \hat{x}_f(\hat{t})$  le profil de vitesse et le profil de la surface libre sont

$$\hat{U}(\hat{x}, \hat{t}) \approx 4.482 \frac{(\hat{x} + 1)}{(\hat{x}_f(\hat{t}) + 1)^5}$$

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) \approx \frac{1}{0.841(\hat{x}_f(\hat{t}) + 1)} \left( 1 - \left( \frac{\hat{x} + 1}{\hat{x}_f(\hat{t}) + 1} \right)^2 \right)^{1/3}$$

à  $\hat{x}$  donné, la hauteur maximale est

$$\hat{h}_{\max}(\hat{x}) \approx 0.679 (\hat{x} + 1)^{-1} \quad \text{pour } \hat{x} > 0$$

Cette hauteur est atteinte à  $\hat{t} = \hat{t}_{\max}$ , telle que :

$$\hat{t}_{\max}(\hat{x}) \approx 0.160 (\hat{x} + 1)^5 - 0.069 + 0.00432 \text{Re}^2 \quad \text{pour } \hat{x} > 0$$

Dont la position du front d'onde correspondante est

$$\hat{x}_f(\hat{t}_{\max}) \approx 1.291 (\hat{x} + 1) - 1 \quad \text{pour } \hat{x} > 0$$

## Canal Incliné

Paramètre de l'écoulement en régime visqueux

$$\hat{L} = \frac{L}{H} \text{tg}(\alpha)$$

Les autres paramètres adimensionnels restent identiques au cas horizontal en utilisant  $g \cos(\alpha)$  en place de  $g$ .

### **Solution d'ordre $0(\varepsilon)$ ; Approximation d'onde cinématique**

L'abscisse d'onde cinématique peut être déterminé à partir de l'équation suivante

$$\hat{x}_s(\hat{t}) = \left( \frac{27}{4} \hat{L} (2 - \hat{L})^2 \right)^{1/3} \hat{t}^{1/3} - 1$$

Entre  $\hat{x} = -1$  et  $\hat{x} = \hat{x}_s(\hat{t})$  Le profil de la surface libre est donné par

$$\hat{h}_i(\hat{x}, \hat{t}) = \left( \frac{\hat{x} + 1}{12 \hat{L} \hat{t}} \right)^{1/2}$$

La profondeur d'onde cinématique est

$$\hat{h}_{FK}(\hat{t}) = \left( \frac{2 - \hat{L}}{16 \hat{L} \hat{t}} \right)^{1/3}$$

### **Solution d'ordre $0(\varepsilon^2)$ relative à la région frontale**

L'abscisse du front d'onde est donné par

$$\hat{x}_f \approx \hat{x}_{Fk} + [Ln(4) - 1] \frac{\hat{h}_{Fk}}{2\hat{L}}$$

et le profil de la surface libre par

$$\hat{h} \approx \hat{h}_c = \begin{cases} \hat{h}_i + \hat{h}_e - \hat{h}_{Fk} & \hat{\xi} \leq 0 \\ \hat{h}_e & \hat{\xi} \geq 0 \end{cases}$$

où  $\hat{\xi} = \hat{x} - \hat{x}_{Fk}$ , et  $\hat{h}_e$  est la solution externe qui vérifie l'équation suivante

$$\hat{L}(\hat{x} - \hat{x}_{Fk}) = \hat{h}_e + \frac{\hat{h}_{Fk}}{2} Ln\left(\frac{\hat{h}_{Fk} - \hat{h}_e}{\hat{h}_{Fk} + \hat{h}_e}\right) + [Ln(4) - 1] \frac{\hat{h}_{Fk}}{2}$$

Approchée à une erreur d'ordre 0 ( $\hat{h}_e^4$ ) par

$$\hat{h}_e = [3\hat{h}_{Fk}^2 \hat{L}(\hat{x}_f - \hat{x})]^{1/3}$$

## Remarques

Dans la phase initiale de l'écoulement, bien avant que l'hypothèse d'onde cinématique ne soit vérifiée, la région frontale de l'écoulement, y compris la position du front d'onde, peut être évaluée à partir des lois du cas horizontal.