

Translation rectiligne et uniforme d'une plaque dans un fluide viscoplastique

Résumé

Ce travail considère le problème fondamental du mouvement isothermique d'un fluide viscoplastique incompressible engendré par une translation rectiligne et uniforme d'une plaque solide dans un grand domaine. Le problème peut être identique si la plaque est fixe et le mouvement du fluide à l'infini est un courant uniforme.

Il examine la nouvelle proposition théorique de Piau (2001) qui tient compte du caractère spécifique de l'écoulement lorsque les niveaux des contraintes sont proches du plateau plastique et également de la déformation élastique du gel loin des parois solide.

Dans ce but, une série d'expériences originale a été réalisée avec un fluide synthétique viscoplastique. L'écoulement est identifié à l'aide de la technique de vélocimétrie par images de particules Dantec (VIP) associée à la technique de marquage afin de se prononcer sur le calcul de la PIV. La force de traînée est mesurée grâce à une balance de précision. Les résultats obtenus sont cohérents qui ont permis de franchir le seuil de la question.

1 Introduction

Les fluides viscoplastiques concernent une gamme large de matières incluant les produits agroalimentaires et cosmétiques, les écumes, les composites, les graisses, les bétons, les mélanges eau-charbons, le charbon liquide, les boues résiduaires, les boues de forage, les peintures, les mélanges eau-argiles...(Bird & al 1983, Utracki 1988). Ils peuvent par conséquent impliqués dans de nombreux procédés industriels. Un nombre considérable de problèmes a été résolu avec ce type de matériau. D'une manière générale, on peut distinguer parmi les études réalisées, celles qui étendent brutalement l'analyse du cas visqueux au cas viscoplastique, et celles qui considèrent le problème distinct et tiennent compte par conséquent de la plasticité du fluide à travers les contraintes normales (cf. Piau 1996).

Peu cependant les travaux qui considèrent le cas de l'écoulement du fluide viscoplastique autour d'un objet solide (notamment si l'objet est une plaque), malgré l'intérêt fondamental du sujet et ces multiples applications dans les procédés industriels, comme dans les procédés de forage et également pour le découpage des produits agroalimentaires. Les difficultés expérimentales et celles de la résolution numérique et analytique de ces fluides, réside en premier lieu sur l'existence d'une discontinuité dans la loi de comportement, et en deuxième lieu sur la forte non linéarité et le nombre important des paramètres intervenant dans la loi.

Il existe en revanche un nombre assez d'articles et d'ouvrages qui traitent le problème avec des fluides visqueux. L'aboutissement des travaux est que le seul nombre adimensionnel intervenant dans l'écoulement en régime laminaire, est le nombre de Reynolds, qui peut être défini dans le cas qui nous intéresse ici où l'objet solide est une plaque de longueur L et de largeur 'b' infiniment grande, comme suit :

$$Re = \frac{\rho L U_0}{\mu} \quad [1]$$

où ρ et μ sont respectivement la masse volumique et la viscosité du fluide, et U_0 est la vitesse du fluide à l'infini si l'on considère que l'objet solide est fixe. Il est supposé également que l'épaisseur e de la plaque n'intervient pas dans l'écoulement, autrement dit $e \ll L$.

Le cas où $Re \ll 1$, donne lieu à un écoulement symétrique entre l'amont et l'aval de la plaque dominé en grande partie par la viscosité. Dans le cas de l'écoulement 3D, il existe un nombre assez de solutions du modèle purement visqueux de Stokes (solution de Stokes pour une sphère, solution d'Oberbeck pour un ellipsoïde, et plusieurs d'autres) qui vérifient assez bien l'expérience, mais pour un écoulement bidimensionnel quelconque la seule solution de ce modèle dans laquelle la vitesse est bornée à la fois sur le solide et à l'infini, est celle où le vecteur vitesse est partout nul (paradoxe de Stokes).

Pour tourner cette difficulté certains chercheurs utilisent l'équation d'Ossen (1910) qui tient compte d'un terme linéaire jugé prédominant intervenant dans l'expression générale de l'inertie. Celle-ci possède une solution du problème posé qui satisfait l'ensemble des conditions aux limites. La solution générale est sous forme d'une série. Un nombre important de chercheurs ont consacré leurs efforts pour développer la solution dans le cas général d'un cylindre, et on retrouve le cas particulier d'une plaque (Tomotika et Aoi 1952, Piercy et Winny 1932, Bairstow et al 1923...).

Lorsque $Re \gg 1$, on perd la symétrie et on rentre progressivement dans le problème de couche limite. Donc, on aura affaire au voisinage de la plaque à des zones très minces de raccordement entre la vitesse à l'infini U_0 est la vitesse nulle imposée par la condition d'adhérence à la paroi. Pour $Re \lesssim 3 \times 10^5$, la couche limite est partout laminaire. La dynamique de l'écoulement dans cette couche est contrôlée par l'équation locale de Prandtl dont il existe une classe d'écoulements pour lesquels on trouve une solution de cette équation, solution dite semblable. A cette famille de solution, appartient le cas particulier important de la plaque sur laquelle se développe la couche limite de Blasius (la couche varie comme $x^{1/2}$).

Les travaux théoriques relatives à l'écoulement d'un fluide viscoplastique autour d'une plaque sont très rares dans la littérature. Néanmoins, on peut citer le travail d'Oldroyd (1946) qui traite quelques problèmes d'écoulements avec le modèle de Bingham, parmi eux le cas qui nous intéresse de la plaque infiniment longue en mouvement rectiligne et uniforme dans un domaine indéfini. L'auteur suppose que la dimension transversale de l'écoulement est très petite devant la dimension longitudinale (hypothèse classique de la couche limite), que le niveau des contraintes est proche du seuil, et que l'inertie est négligeable. Il obtient des solutions semblables où l'épaisseur de la couche limite varie, le long de plaque, comme $x^{2/3}$.

Mais d'après le travail récent de Piau (2001) ce résultat n'est pas conforme à la physique du mouvement, car l'écoulement doit être, dans ce cas, symétrique à l'aval et à l'amont de la plaque. Comme Oldroyd, Piau (2001) considère le problème des écoulements à faibles vitesses où les niveaux des contraintes sont proches du plateau plastique. Exclusivement, Piau écrit les conditions de déformations élastiques du gel loin des parois solide afin d'obtenir l'expression du gradient de pression qui remplace la condition de l'écoulement irrationnel du modèle Newtonien. En rapprochant le gradient de pression à une valeur constante, il aboutit à des solutions semblables et plusieurs formes possibles de la couche limite. Il discute alors chaque solution suivant les conditions réelles de l'écoulement et propose à la fin une solution optimale qui tient compte de la variabilité du gradient de pression.

Le but essentiel de ce travail est de dégager les pistes nécessaires pour mieux comprendre le problème du mouvement isothermique d'un fluide viscoplastique incompressible autour d'une plaque. L'approche théorique de Piau (2001) sera également examinée. Dans ce but, un fluide modèle a été sélectionné, puis bien caractérisé en rhéométrie. Le matériau est ensuite expérimenté pour obtenir une série d'essais originale dans le problème envisagé.

L'étude commence en décrivant le fluide et le dispositif expérimental utilisés, les

résultats obtenus sont présentés et discutés ultérieurement, puis comparés aux prédictions théoriques. La conclusion finale vient à la fin du travail.

2 Fluide utilisé

Le fluide modèle utilisé est une solution d'eau et de Carbopol déjà mis en œuvre dans plusieurs travaux antérieurs au laboratoire. Le Carbopol est une résine soluble en milieu aqueux, c'est un polymère obtenu à partir de la résine Carbopol 940 de B.F. Goodrich Company, de masse volumique 1000 g/l et de masse moléculaire $M = 2,4 \cdot 10^6$ g/mol. En solution et après neutralisation à l'aide d'une base minérale telle que la soude, une ionisation de la résine conduit à un épaissement instantané. La consistance du produit dépend fortement de la concentration et du pH. Pour de faibles valeurs du pH, la solution est très fluide. Ensuite, la consistance augmente pour atteindre un plateau entre pH=7 et pH=8. Le seuil de contrainte est l'une des propriétés rhéologiques la plus importante de ce fluide.

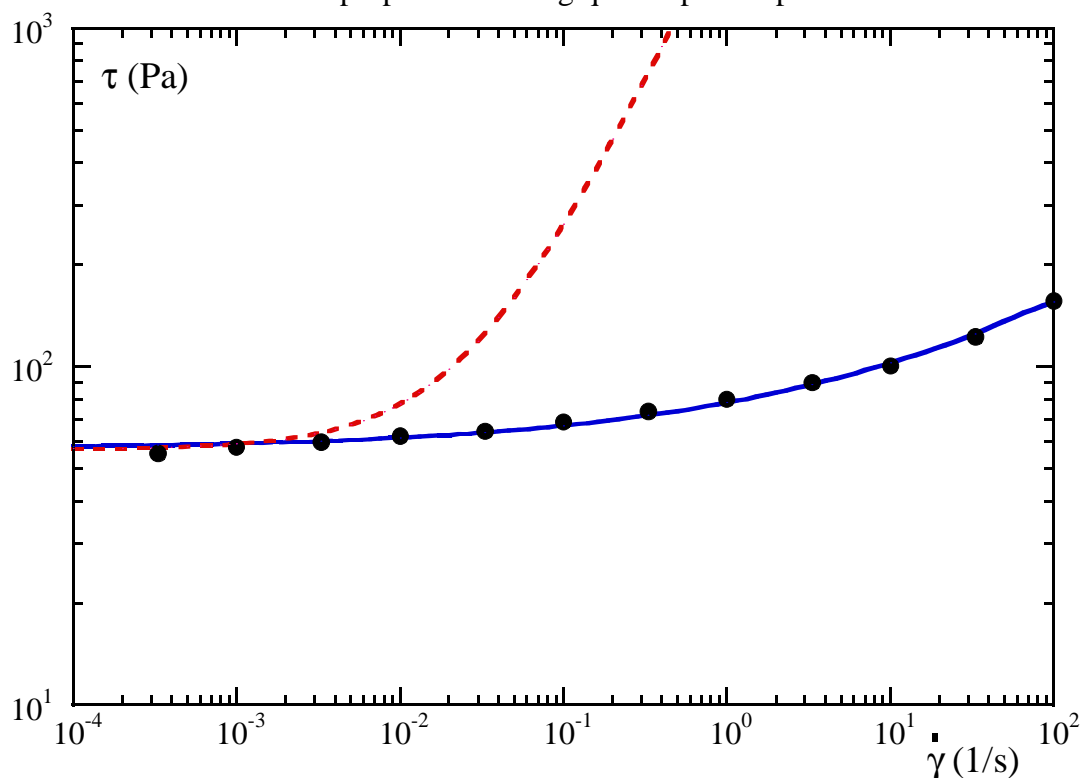


Figure 1 : Courbe d'écoulement du gel de Carbopol : essai d'écoulement sur le Weissenberg. ● mesures, — Loi d'Herschel Bulkley
- - - Loi de Bingham ($s = 57$ Pa ; $\mu = 2070$ Pa.s)

La préparation du produit est effectuée selon des procédures acquises au Laboratoire, qui permettent d'une part d'assurer l'hydratation complète et la dissipation de la mousse. D'autre part, elles permettent d'éviter la formation de grumeaux, ou d'un film de résine à la surface du fluide ainsi que l'incorporation de bulles d'air dans le fluide. Deux phases sont indispensables dans la préparation du gel : la phase de malaxage du Carbopol avec l'eau distillée et la phase de neutralisation du mélange. En chaque étape, on doit respecter la vitesse et le temps de malaxage pour obtenir à la fin un matériau bien homogène, sans bulles d'air et au maximum de sa consistance. La concentration massique en Carbopol du gel utilisé est de 0.25%, qui d'après l'étude paramétrique de Belhadri (1996) donne un matériau ayant un seuil de l'ordre de 60 Pa. C'est avec cette valeur du seuil de contrainte relativement grande qu'on a voulu

aborder le problème afin de bien distinguer les effets plastiques du matériau. La concentration est vérifiée à l'aide d'un dessiccateur avec balance qui sert à éliminer rapidement l'humidité contenue dans l'échantillon. La précision de lecture est de 0.01%.

La caractérisation du gel est effectuée à l'aide de deux rhéomètres (Carri-Med CSL100 à contrainte imposée et Weissenberg à vitesse de déformation imposée), selon les méthodes mises au point par Magnin & Piau (1987-1990) qui permettent d'éviter plusieurs problèmes : la fracturation, le glissement, l'évaporation et le creusement. Les essais ont été réalisés avec un cône de diamètre 49 mm, le demi angle du cône étant de 4,21 degrés et une troncature de 570 μ .

Le gel de Carbopol a un comportement viscoplastique avec des effets élastiques pour des contraintes inférieures au seuil de contrainte, une limite qui sépare deux états différents : l'état solide de l'état d'écoulement. Le comportement en écoulement du gel est bien représenté par le modèle d'Herschel-Bulkley, voir figure 1. Le modèle s'écrit en cisaillement simple :

$$\tau = s + K|\dot{\gamma}|^n \quad \text{si } \tau \geq s \quad [2]$$

τ et $\dot{\gamma}$ sont la contrainte tangentielle et le gradient de vitesse, respectivement. Les trois paramètres rhéologiques de la loi (s , K , n) sont obtenus par ajustement des mesures rhéométriques avec la courbe théorique. On trouve $s = 57 \text{ Pa} \mp 7\%$, $K = 20.3 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n \mp 11\%$ et $n = 1/3$. Les incertitudes sont celles dues à la reproductibilité des mesures. D'une manière plus générale, il est connu que les erreurs rhéométriques peuvent atteindre 20%, voir 30%.

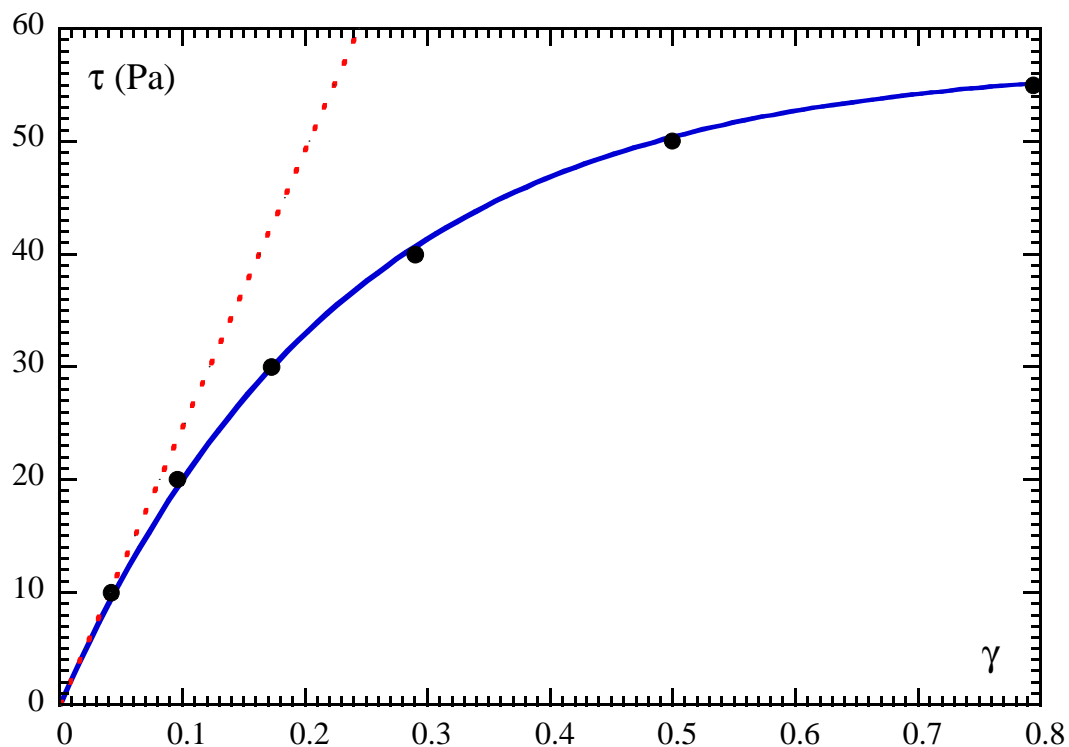


Figure 2 : Déformation du gel avant le seuil de contrainte essais de fluage (Carri-Med CSL100)

● mesures, — loi représentée par l'équation (3), - - - loi linéaire

L'ensemble des mesures effectuées en fluage montre pour $\tau < s$ que la contrainte et la déformation angulaire γ sont liées approximativement par une loi exponentielle de type :

$$\tau = S(t) \left(1 - \text{Exp} \left(-\alpha(t) \frac{G}{s} \times \gamma \right) \right) \quad \text{pour } \tau < s \quad [3]$$

Celle-ci est valable après un certain temps où les effets inertiels de l'appareil deviennent négligeables.

$S(t)$ et $\alpha(t)$ sont des fonctions du temps. Il semble qu'on a :

$$\underset{t \rightarrow \infty}{S(t)} \rightarrow s \quad \text{et} \quad \underset{t \rightarrow \infty}{\alpha(t)} \rightarrow 1$$

G étant le module élastique

La figure 2 montre la contrainte en fonction de la déformation angulaire pour $t = 30$ s. Avec cette valeur du temps relativement grande, il est convenable de faire l'approximation $S(t) \approx s$ et $\alpha(t) \approx 1$. Ainsi par ajustement des mesures avec la relation (3), on évalue le module élastique G à environ 246 Pa. Enfin, notons que d'après ces résultats la loi de comportement de notre fluide n'est pas tout à fait linéaire, à moins de se limiter à $\tau \ll s$ où l'équation (3) se simplifie à $\tau \approx G \gamma$.

3 Dispositif expérimental (figure 3)

Le dispositif expérimental utilisé est constitué essentiellement d'une plaque en acier inoxydable (1) et d'un réservoir en verre (2) rempli du fluide. La plaque est de dimension 200×200 mm ($L=200$ mm, $b=200$ mm), son épaisseur est de 0.5 mm. Elle peut effectuer une translation rectiligne et uniforme suivant la verticale par l'intermédiaire d'un moteur électrique (3).

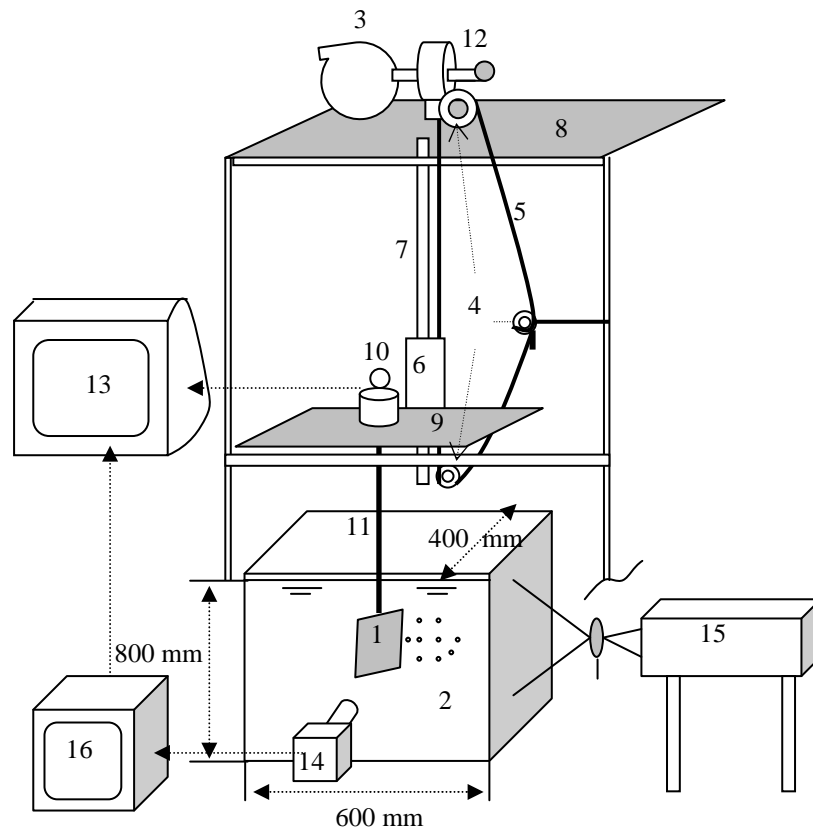


Figure 3 : Dispositif expérimental

(1) Plaque (2) Réservoir (3) Moteur

(4) Poulies (5) Courroie (6) Chariot (7) Cylindre d'entraînement (8) Corps de la plateforme (9) Plateau (10) Balance (11) Tige (12) Réducteurs (13) Station d'acquisition et de traitement (14) Caméra (15) Laser

Le mouvement de rotation du moteur se transforme au mouvement de translation de la plaque grâce à trois poulies (4) et d'une courroie (5). Cette dernière est fixée sur un chariot (6) qui lui aussi lié à un cylindre (7) par une liaison glissière pour le guidage du mouvement vertical de la plaque. Les deux extrémités du cylindre sont fixées au corps de la plate-forme (8). Un plateau (9) sur lequel on a disposé une balance (10) de 0.01 g de précision, a été immobilisé sur le chariot. Une tige (11) en acier inoxydable de 4 mm de diamètre vient fixer d'une part sur la balance pour prendre la mesure de la traînée, d'autre part sur la plaque. Cette dernière baigne dans un réservoir rempli du fluide de hauteur 800 mm suivant la direction du mouvement et de section transversale 600×400 mm. De cette façon, le mouvement de rotation du moteur se transforme à un mouvement de translation, successivement : du chariot, du plateau, de la balance, de la tige et enfin de la plaque.

Pour éviter le glissement du fluide avec la paroi, propriété bien connue du fluide utilisé en contact avec les parois lisses, nous avons collé, comme en rhéométrie, sur les deux faces de la plaque du papier abrasif de rugosité 0.2 mm. L'épaisseur totale de la plaque 'e' devient alors 1.5 mm. D'autre part, pour pouvoir étudier le problème à des niveaux de contraintes proches du seuil, on a choisi de réduire au maximum possible la vitesse de translation de la plaque tout en gardant la précision. Pour cela trois réducteurs (12) ont été placés à la sortie du moteur venant entraîner la poulie principale placée en haut de la plate-forme. Dans ces conditions, la vitesse de la plaque U_0 peut être variée dans la gamme 1 à 5.4 mm/mn avec une précision de 1%.

4 Procédure expérimentale

4.1 Mesure de la traînée

Mesure de la traînée de l'ensemble plaque et tige

La force de traînée est mesurée grâce à la balance liée à un ordinateur (13) afin de suivre l'évolution de la force jusqu'au régime permanent. La difficulté expérimentale est que le fluide testé possède un seuil de contrainte et qu'au dessous de ce seuil, c'est à dire au repos, les contraintes à l'intérieur du fluide peuvent être quelconques provoquant ainsi des problèmes dans le tarage de la balance. La solution est de faire translater la plaque dans un sens puis dans l'autre sens avec la même vitesse pour éliminer à la fin les forces d'Archimède. La procédure utilisée est la suivante :

1. Dans le mouvement ascendant de la plaque, on démarre toujours l'expérience (quelque soit la vitesse) lorsque la plaque est à environ 370 mm au-dessous de la surface libre et à environ 180 mm au-dessus du fond. On arrête lorsque la plaque a parcouru une distance de 100 mm, soit 270 mm au-dessous de la surface libre et 280 mm au-dessus du fond.
2. On laisse ensuite le fluide se relaxé jusqu'à où le poids enregistré se stabilise sur une valeur quasiment constante (après environ 15 mn).
3. On démarre le mouvement descendant de la plaque puis on arrête lorsque la plaque revient à sa position initiale. Après un temps de relaxation (d'environ 15 mn), on change la vitesse et on recommence les étapes 1-2-3.

Les mesures ont été effectuées avec des vitesses allant de 16.7 à 83.3 $\mu\text{m}/\text{s}$. La figure 4 montre un exemple du poids enregistré par la balance dans le mouvement ascendant et descendant pour une vitesse de 77 $\mu\text{m}/\text{s}$. Et pour l'ensemble des mesures effectuées, il apparaît que le régime permanent dépend directement de la distance parcourue par la plaque.

Quelque soit la vitesse, le poids devient quasiment stable (à environ 97.5%) lorsque l'objet parcourt une distance d'environ $0.44a$ ($a = L/2 = 100\text{mm}$).

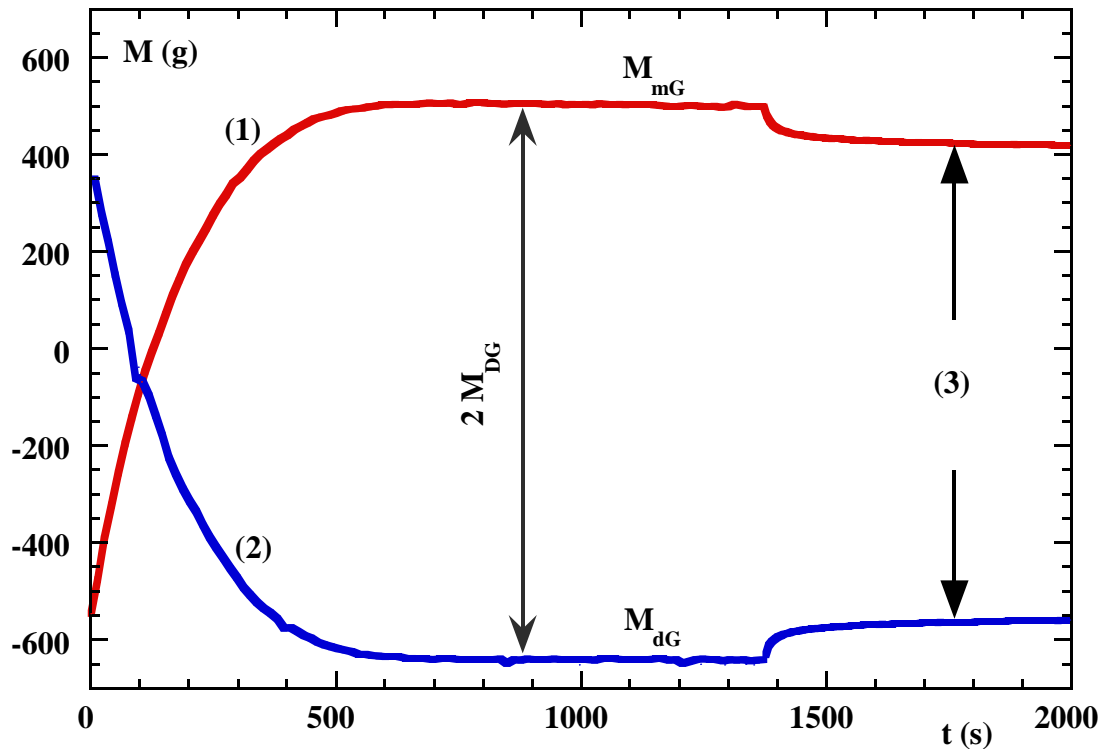


Figure 4 : Evolution du poids enregistré en fonction du temps pour $U_0 = 77 \mu\text{m/s}$:

(1) mouvement ascendant (2) mouvement descendant

(3) relaxation

A titre indicatif, on peut signaler que l'évolution du poids enregistré en fonction du temps, par conséquent la force de traînée, suit approximativement une loi exponentielle de type :

$$\frac{F_{Dt}(t) - F_{D_0}}{F_D - F_{D_0}} = 1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \quad [4]$$

où F_{D_0} est la force résiduelle à $t = 0$ et F_D étant la force de traînée au régime permanent.

En introduisant maintenant le temps caractéristique de la relaxation θ comme suit :

$$\theta = \frac{sa}{GU_0} ; s \approx 57 \text{ Pa} \quad \text{et} \quad G \approx 246 \text{ Pa}$$

On obtient ici :

$$\lambda \approx 0.51 \theta \quad [5]$$

Les poids M_{mG} et M_{dG} (poids enregistrés par la balance en régime permanent dans le mouvement ascendant et descendant de la plaque, respectivement) sont moyennés dans la gamme de translation de la plaque allant de $0.5a$ à $0.6a$. La position de la plaque par rapport à la surface libre correspondante à cette gamme est de 310 à 320 mm dans le mouvement ascendant, et 320 à 330 mm dans le mouvement descendant. On peut déduire alors la force de traînée globale (de la plaque et la tige) en utilisant l'expression suivante :

$$F_{DG} = \frac{M_{mG} - M_{dG}}{2} \times g \quad [6]$$

Correction de la traînée par élimination du frottement à la tige

Un calcul préliminaire donne un ordre de grandeur du frottement à la plaque égal à 465 g et un frottement à la tige de 20 à 27 g. Ce dernier reste donc assez petit devant le premier (environ 20 fois plus petit). Mais d'après l'expérience, dans la gamme maximale de variation de vitesse (de $U_0 = 16.7 \mu\text{m/s}$ à $U_0 = 83.3 \mu\text{m/s}$), le poids n'a augmenté que de 30 g, soit de l'ordre de grandeur du frottement à la tige. Il est donc indispensable de faire une correction des résultats précédents afin de bien caractériser l'influence du terme visqueux sur la force de traînée de la plaque seule.

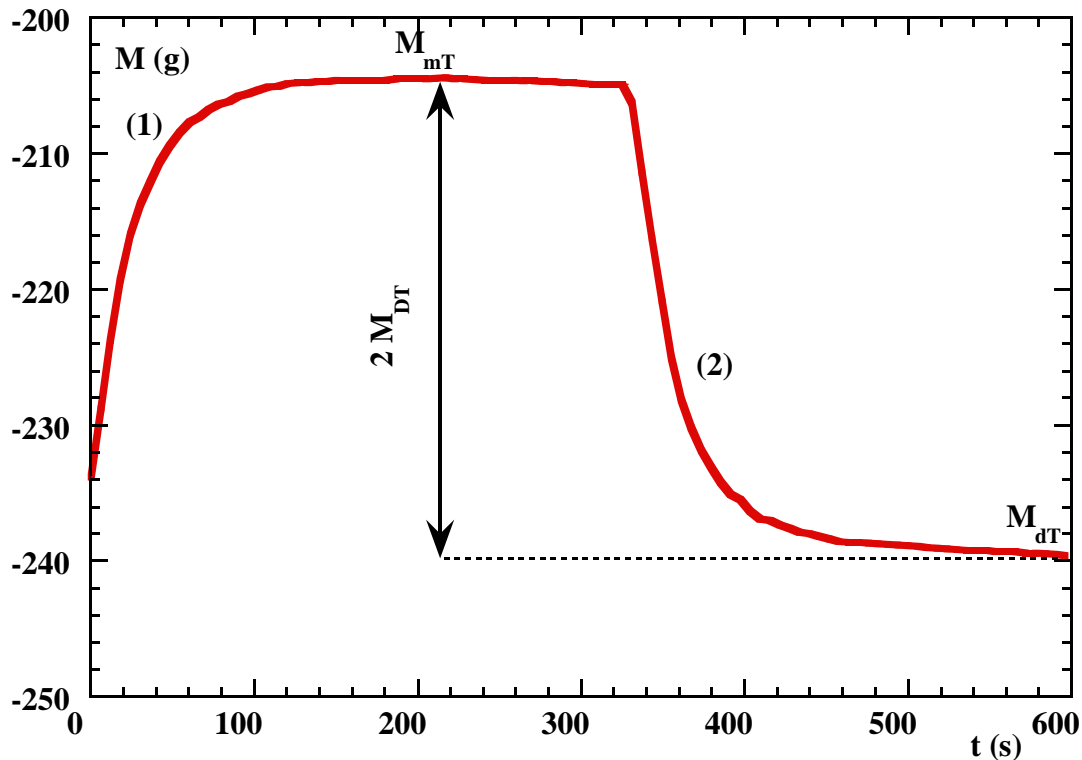


Figure 5 : Evolution du frottement à la tige en fonction du temps pour $U_0 = 33.3 \mu\text{m/s}$: (1) mouvement ascendant (2) mouvement descendant

Comme le régime permanent ne dépend que de la distance parcourue par l'objet, la tâche devient facile pour établir cette correction. Dans ce but, la plaque a été entièrement enlevée pour réaliser une mesure de la traînée de la tige seulement. En utilisant le même procédé en prenant cette fois-ci un trajet plus court (30 mm : position 305 à 335 par rapport à la surface libre), et en moyennant les poids M_{mT} et M_{dT} (poids enregistrés par la balance en régime permanent dans le mouvement ascendant et descendant de la tige, respectivement [figure 5]) dans les mêmes positions que précédemment (avec la plaque), on déduit la force de traînée de la plaque en faisant tout simplement la soustraction, c'est à dire :

$$F_D = F_{DG} - F_{DT} \quad \text{où} \quad F_{DT} = \frac{M_{mT} - M_{dT}}{2} \times g \quad [7]$$

On trouve que la force de traînée de la tige varie peu avec la vitesse (de 16.1 à 18.5 g dans la gamme $U_0 = 16.7$ à $83.3 \mu\text{m/s}$) et elle reste inférieure à la valeur estimée au départ. Comme nous allons voir dans la suite, ceci est dû au glissement du fluide avec la surface lisse de la tige (de même nature que la plaque sans papier rugueux : acier inoxydable).

4.2 Mesure du champ de vitesse

Pour calculer les vitesses, nous avons utilisé la technique de vélocimétrie par images de particules Dantec (VIP). C'est une technique de mesure basée sur le suivi de particules. L'idée est de prendre deux images de l'écoulement séparées d'un temps Δt connu. En calculant par des méthodes statistiques (basées sur les niveaux de gris de la zone observée) le déplacement des particules pendant le temps Δt , on accède à la vitesse = distance / temps. Les images (capturées en 576×720 pixel) sont ici obtenues grâce à une caméra (14) de 25 images par seconde en éclairant la zone visualisée à l'aide d'un laser (15). Le moniteur (16) sert à la mise au point de l'objectif de la caméra et le réglage des paramètres optiques (contraste, définition, luminosité) et également au bon suivi de l'écoulement. Ces images sont enregistrées puis traitées à l'aide du logiciel Dantec PIV 2000 avec l'algorithme de cross-corrélation. Les vitesses sont calculées par le logiciel dans des parties découpées de l'image appelées zones d'interrogations.

De façon générale, un certain nombre de conditions doivent être respectées pour un calcul de PIV. Chaque zone d'interrogation doit contenir 5 particules au minimum, et à l'intérieur d'une zone, les gradients de vitesse doivent être assez faibles : la variation des vitesses admise ne doit pas excéder 10% de la valeur moyenne. De plus, la dimension à l'écran des particules doit être supérieure à environ 4 pixel pour qu'elle soit bien détectée, et enfin le temps Δt doit être choisi de telle sorte que le déplacement des particules entre les deux images n'excède pas le quart de la zone d'interrogation et le déplacement réel des particules doit être supérieur à deux fois leur taille. Il faut donc impérativement commencer par un calcul strict et des expériences préliminaires sûres avant de se prononcer sur les résultats du calcul de la PIV. Dans le but final est de choisir la taille de la zone d'interrogation, la dimension des particules, le zoom de la zone observée, le temps Δt séparant deux images et enfin de détecter des éventuelles anomalies qui peuvent se produire à l'intérieur de l'écoulement.

Parmi les moyens les plus convaincants permettant d'atteindre cet objectif, est de suivre l'écoulement par la technique de marquage. On a donc choisi des marqueurs constitués d'argile rouge diluée dans le fluide pour lui conférer les mêmes propriétés. Les marqueurs sont introduits horizontalement (photographie 1, voir annexe) dans le fluide à l'aide d'une grande seringue qui peut être plongée pratiquement jusqu'au fond du réservoir. A $t=0$, on mis on marche la manip tout en déclenchant l'enregistrement vidéo. En maintenant la caméra fixe, on peut voir (photographie 1) le déplacement de la plaque traversant les colorants. Dans le champ de vision choisi, on peut distinguer deux zones de l'écoulement : une zone située au voisinage de la paroi caractérisée par des gradients de vitesse assez forts suivie d'une zone à gradients de vitesse relativement faibles. Cette remarque nous amène à choisir une zone d'interrogation de dimension 64×64 pixel et d'adapter les dimensions de la zone visualisée selon le but recherché. Si on veut étudier le mouvement général, on peut choisir un grossissement faible (ici 100 mm suivant la direction de l'écoulement) et lorsqu'on veut obtenir avec précision les champs de vitesse dans l'écoulement qui se produit au voisinage de la plaque, il convient de prendre un grand zoom (ici 20 mm suivant la direction de l'écoulement). La taille des particules convenables avec les grossissements choisis doit être de l'ordre de 100 μm . On a prie alors des particules réfléchissantes en Rilsan Aluminise de dimension moyenne 150 μm . En suivant l'évolution au cours du temps des colorants, il est également possible d'évaluer

l'ordre de grandeur de la vitesse dans différentes zones de l'écoulement, ce qui nous amène à chiffrer le temps Δt convenable pour un calcul de PIV.

Remarquons maintenant le deuxième colorant compté du haut au bas où une hétérogénéité volontaire a été introduite dans la mise du colorant. A l'endroit de l'hétérogénéité, une fracturation se produit nettement à $t = 40 \text{ mn}$. Ce phénomène est l'une des propriétés connues de ce fluide dont l'origine est effectivement l'existence d'une inhomogénéité de l'état du matériau (Magnin et Piau 1990). Dans le reste de l'écoulement, on peut constater l'absence de ce phénomène, cela nous assure du bon mode de préparation du gel. D'autre part, on peut remarquer que l'écoulement amont est différent de l'écoulement aval. En effet, un phénomène se produit en aval caractérisé par un mouvement des colorants suivant le sens inverse du mouvement de l'objet, c'est comme si un flux de matière venait frapper le bord aval de l'objet avec une vitesse de l'ordre de $1/10$ de la vitesse de la plaque. En suivant en particulier le mouvement du premier colorant, on peut se rendre compte de cet effet. Comme nous allons voir dans la suite, ce phénomène a été également identifié grâce à la PIV.

La procédure expérimentale adaptée est la suivante : la caméra est maintenue fixe par rapport à l'expérimentateur immobile. On déclenche spontanément la mesure de la force de traînée et le mouvement de la plaque. On attend jusqu'à où le régime permanent est atteint. On démarre ensuite l'enregistrement vidéo et on arrête lorsque la plaque quitte complètement le champ de vision de la caméra (référentiel Galiléen (\mathcal{R}^*) fixe).

On peut noter que bien que l'écoulement du fluide par rapport à la caméra est non permanent, il est cependant permanent par rapport à un système d'axe lié au solide et un observateur (\mathcal{R}) immobile dans ce système.

La grande difficulté rencontrée dans l'analyse du film enregistré est que le champ de vision de la caméra est petit devant la longueur totale de l'écoulement. Il est donc impossible d'apprécier l'écoulement le long de la plaque à un temps donné. L'une des solutions est de changer les particules en les prenant plus grandes et d'augmenter ainsi le champ de vision de la caméra, mais dans ce cas on perd complètement la précision dans l'écoulement principal qui se produit au voisinage de la plaque.

La solution adaptée est de faire l'acquisition de deux séries d'images (A) et (B) prises à des instants t et $t + \Delta t$, respectivement. Puisque Δt est petit, chaque couple d'images (t , $t + \Delta t$) est considéré comme une seule image prise à $t + \Delta t/2$. Celle-ci représente des positions de l'écoulement fixes par rapport à la caméra dont on peut leur associer un vecteur vitesse grâce à la PIV en analysant le couple d'images (t , $t + \Delta t$). Comme le mouvement relatif du fluide par rapport au référentiel (\mathcal{R}) est permanent, il est possible d'éliminer le temps en changeant le référentiel (\mathcal{R}^*) par (\mathcal{R}). Dans ce but, toutes les images de la série (A) ont été découpées puis disposées, suivant le système d'axe lié à la plaque, dans une seule image de taille plus grande. On procède de la même façon pour la série d'images (B). Les deux grandes images ainsi obtenues sont analysées grâce au logiciel de la PIV avec l'intervalle de temps Δt . On obtient une cartographie presque complète de l'écoulement prise forcément à des instants différents mais elle présente assez bien l'écoulement qui se produit autour de la plaque pour t quelconque lorsque le régime permanent est atteint.

5 Représentation des résultats

5.1 Force de traînée

On définit souvent le coefficient de traînée comme le rapport de la force de traînée exprimée en unité d'une surface et l'énergie cinétique de l'écoulement. Dans le cas présent d'une plaque solide de longueur L et de largeur b , on utilise l'expression suivante :

$$C_D = \frac{f_D / L}{\rho U^2} \quad [8]$$

où $f_D = F_D / b$ est la force de traînée par unité de largeur de la plaque.

Comme nous allons voir dans la suite, pour les fluides viscoplastiques et les écoulements à faibles vitesses, il est plus convenable de redéfinir ce coefficient non pas en rapport avec l'énergie cinétique mais plutôt avec l'effort exercé par le seuil de contrainte. On définit alors ici le coefficient de traînée plastique, comme suit :

$$C_D^s = \frac{f_D}{4s a} \quad [9]$$

Une simple analyse dimensionnelle basée sur le théorème de Vaschy-Buckingham permet en négligeant l'effet de la gravité de déduire la forme de la solution qui donne C_D^s . Sans rentrer dans les détails, on a :

$$C_D^s = G\left(Re^s, \frac{1}{Od}, n\right) \quad [10]$$

où Re^s (varie ici entre 4.9×10^{-9} et 1×10^{-7}) est le nombre de Reynolds plastique : rapport des forces inertielle et forces plastiques, et Od (varie entre 38 et 65) étant le nombre d'Oldroyd : rapport des forces plastiques et forces visqueuses. Les deux nombres sont définis respectivement, comme suit :

$$Re^s = \frac{\rho U_0^2}{s} \quad ; \quad Od = \frac{s a^n}{K U_0^n} \quad [11]$$

Le nombre de Reynolds visqueux « Re » est le rapport $Od \times Re^s$, ou bien :

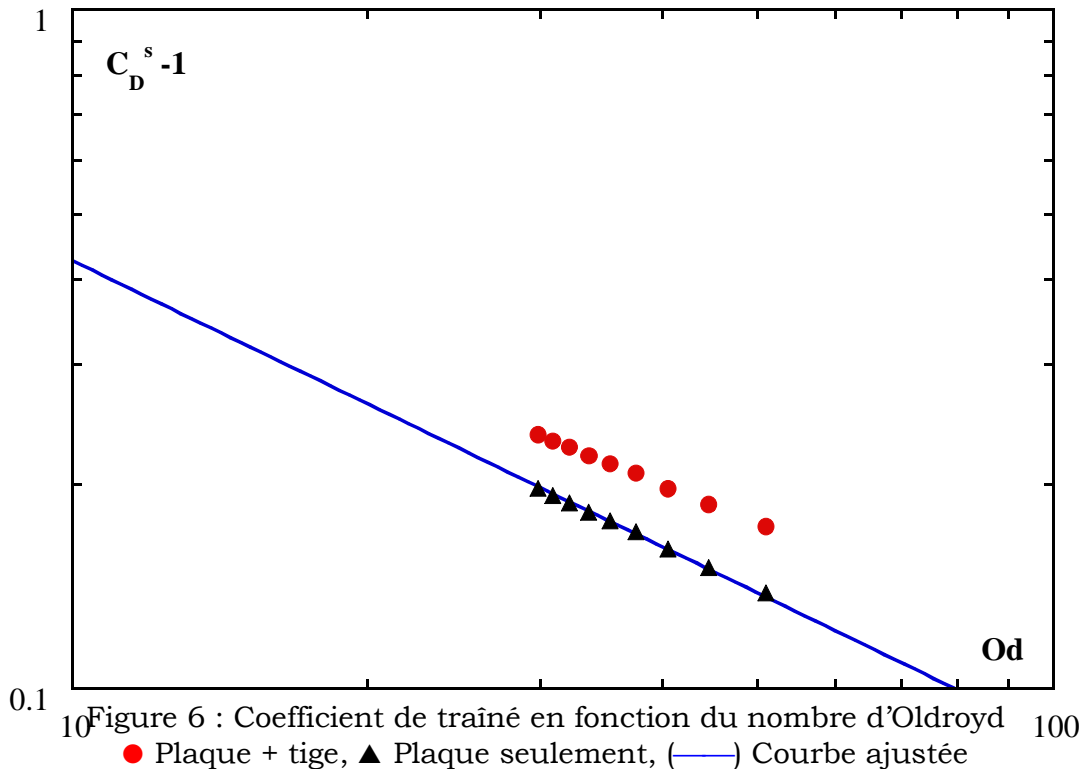
$$Re = \frac{\rho U_0^{2-n} a^n}{K} \quad [12]$$

Pour les écoulements à faibles vitesses (Re^s très petit), il est convenable de ne garder que l'influence de Od et n , c'est à dire :

$$C_D^s = G\left(\frac{1}{Od}, n\right) \quad \text{lorsque } Re^s \rightarrow 0 \quad [13]$$

Puisque le fluide nécessite des contraintes supérieures au seuil pour qu'il coule, la force de traînée devrait être alors supérieure à $4s a$ (ou bien $C_D^s > 1$) pour que la plaque bouge. Ainsi, on représente sur la figure (6) la variation de $C_D^s - 1$ avec Od . $C_D^s - 1$ diminue avec l'augmentation du nombre d'Oldroyd, presque comme une loi de puissance. En posant $C_D^s - 1 = k Od^{-\alpha}$, on obtient les valeurs expérimentales moyennes : $\alpha \approx 0.7$ et $k \approx 2.14$. Mais il faut prendre ces valeurs avec soin à cause de la très grande sensibilité de la quantité $C_D^s - 1$ aux variations du seuil de contrainte. En effet, la barre d'erreur commise en

rhéométrie sur le seuil entraîne une erreur sur $C_D^s - 1$ qui peut atteindre $\mp 57\%$. Le nombre d'Oldroyd est moins sensible. Sa précision est d'environ $\mp 17\%$. Enfin, remarquons sur la figure l'intérêt de faire la correction de la traînée en retranchant le frottement dû à la tige.



5.2 Champ de vitesse

Grâce à la PIV, on a donc déterminé des cartographies de l'écoulement représentant le champ de vitesse et les lignes de courant. La façon dont on a obtenu les figures est présentée auparavant. Ce qu'il faut peut être signaler ici est que la planche (1) (cf. annexe) a été traitée avec $\Delta t = 40s$ et les trois autres planches qui suivent, avec $\Delta t = 200s$, $\Delta t = 240s$ et $\Delta t = 3s$, respectivement.

Lorsqu'on s'intéresse à la planche (1) qui représente l'écoulement général avec une vitesse de la plaque égale à 4.62 mm/mn , on peut se rendre compte de l'existence de deux tourbillons. Le premier se produit juste en amont à une distance d'environ 22 mm de la paroi. La vitesse moyenne du premier tourbillon est de l'ordre de 1/100 de la vitesse de la plaque. Le deuxième dont on voit à peine son début, se produit dans le sillage. Entre les deux tourbillons, on constate un flux de matières caractérisé par un champ de vitesse (de l'ordre de 1/10 de la vitesse de la plaque) inversé par rapport au mouvement principal. L'ensemble de ces phénomènes fait qu'on a pas une véritable symétrie de part et d'autre de la plaque.

Avant d'aller plus loin et d'essayer d'interpréter ces résultats, il convient d'abord d'examiner la possibilité que le de flux de matière est causé tout simplement par un déséquilibre de la plaque par rapport à la verticale. Il faut également voir si les tourbillons sont des phénomènes locaux ou au contraire, ils se translatent avec le système d'axe lié à l'objet solide, donc permanents dans ce système. Dans ce but bien précis, la caméra est disposée de telle sorte que la plaque soit au milieu du champ de vision pour prendre l'écoulement de part et d'autre de la plaque au moins en amont et dans le sillage. De plus, au

lieu de grader la caméra dans un endroit fixe, on la déplace cette fois-ci suivant la verticale de manière à prendre différentes positions de l'écoulement à des temps relativement courts. La vitesse de la plaque choisie pour ce travail est plus faible (1 mm/mn), ce qui permet à l'expérimentateur de prendre toutes les mesures nécessaires sans que l'objet soit trop déplacé et de pouvoir donner à la fin une cartographie presque instantanée de l'écoulement. Le résultat obtenu est représenté sur la planche (2). On retrouve bien l'ensemble des phénomènes décrit précédemment, les tourbillons sont donc certainement permanents pour un système d'axe lié à l'objet solide. D'autre part, la symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe Ox permet d'écarter la possibilité que la plaque soit en état de déséquilibre par rapport à la verticale.

Les phénomènes obtenus sont probablement dus à la géométrie limitée de l'écoulement et au glissement du fluide avec les parois latérales du réservoir en verre. Eventuellement, l'épaisseur de la plaque peut avoir également un rôle à jouer. Mais dans tous les cas, ils peuvent être considérés comme des écoulements secondaires vu leurs vitesses relativement faibles par rapport à la vitesse de la plaque. En négligeant alors ces effets, on peut estimer d'après la planche 1 l'épaisseur de la couche limite au centre de la plaque à environ 16 mm.

Un autre point intéressant à signaler porte sur l'influence de la rugosité de la plaque. La planche 3 est prise avec la même plaque mais sans papier rugueux. Il apparaît, même si l'allure des figures restent pratiquement la même que dans le cas rugueux, des différences notables. On peut voir par exemple que les vitesses de l'écoulement sont beaucoup plus faible ici (environ 65 fois plus petites que dans le cas visqueux). Il en est de même pour la force de traînée (presque 4 fois plus petite). De plus, aux deux extrémités de la plaque, c'est à dire aux voisinages des singularités, les directions du champ de vitesse ne sont pas exactement pareils. L'ensemble de ces différences sont occasionnées par le phénomène du glissement du fluide au contact avec les parois lisses. C'est une propriété intrinsèque de ce matériau déjà mise en évidence au Laboratoire dans plusieurs travaux antérieurs.

On laisse de coté tous ces phénomènes et on s'intéresse maintenant à l'écoulement principal qui se produit au voisinage de la paroi rugueuse. Vu les gradients de vitesse assez forts dans cette région les deux planches (1) et (2) prises avec un faible zoom donnent très peu de renseignements sur ce qui se passe ici.

En revanche la planche (4) prise avec un zoom plus grand permet d'atteindre l'objectif. On tentera donc de mieux l'exploiter. Ainsi, en utilisant les valeurs numériques correspondantes, les profils de vitesses aux différents abscisses sont tracés sur la figure 7 avec les variables adimensionnelles suivantes :

$$(x^+, y^+, u^+, v^+, \psi^+) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{u}{U_0}, \frac{v}{U_0}, \frac{\psi}{aU_0} \right) \quad [14]$$

ψ est la fonction de courant.

L'origine de x^+ est prie le bord d'attaque. On peut alors constater que les profils de vitesse varient avec l'abscisse, et par conséquent la couche limite n'est pas uniforme dans notre cas. De plus, on n'a pas une véritable symétrie de l'écoulement et l'allure des courbes diffère suivant l'abscisse considéré notamment pour les profils situés en aval. Ces derniers passent par un maximum avant d'atteindre la vitesse à l'infini. Enfin, on peut remarquer que les vitesses loin de l'objet solide ne sont pas vraiment constantes ($u^+ \neq 1$), il semble qu'elles varient dans notre cas avec l'abscisse. Ces remarques sont d'une manière générale en désaccord avec les solutions semblables et les conditions aux limites du problème. Comme déjà signalé précédemment, ceci peut être dû à la géométrie limitée de l'écoulement et au

glissement du fluide avec les parois lisses du réservoir qui font apparaître des tourbillons dans l'écoulement.

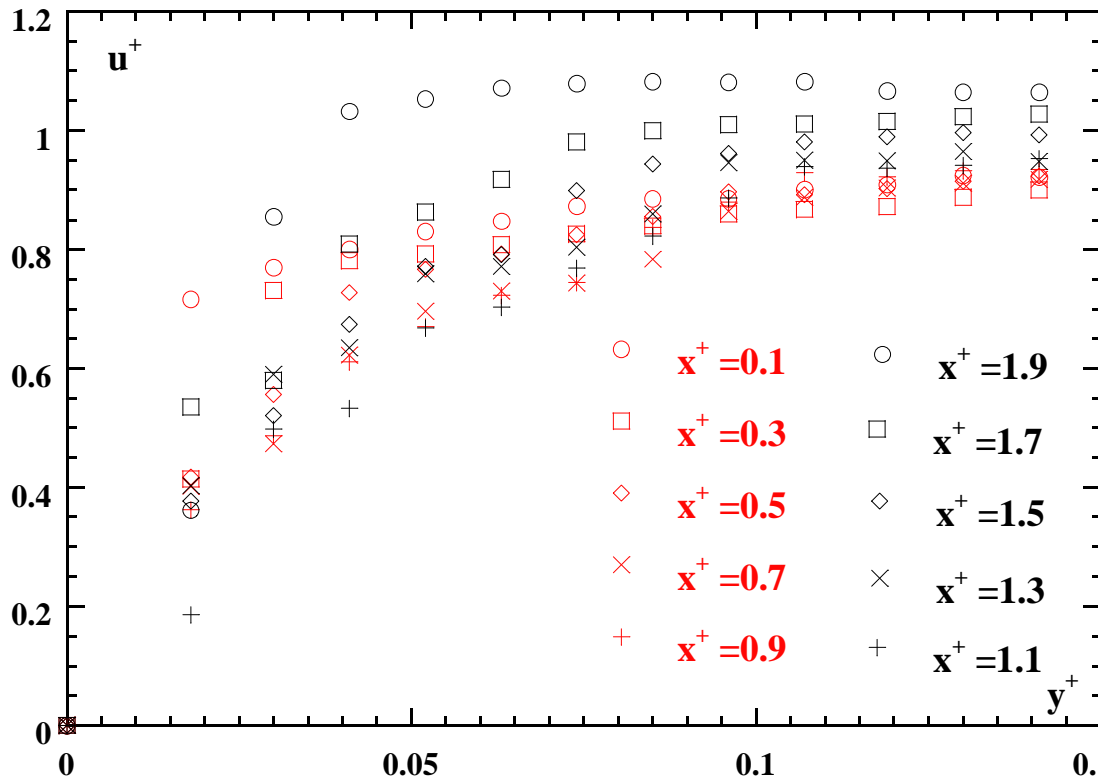


Figure 7 : Profils de vitesse longitudinaux pour une vitesse égale à $77 \mu\text{m/s}$ et par rapport au référentiel (\mathfrak{R})

$$Re = 4,01 \times 10^{-6} ; Re^s = 1,04 \times 10^{-7} ; Od = 38,6$$

Les lignes de courant sont tracées par le logiciel de la PIV et présentées sur les planches en annexe pour un observateur fixe (référentiel \mathfrak{R}^*). Elles sont très utiles pour apprécier d'une manière générale les trajectoires des particules de fluide. Mais, il est aussi intéressant d'avoir les valeurs numériques de ψ en chaque ligne de courant. Dans ce but, en se basant sur la définition de la fonction de courant et sur les valeurs numériques de $u_{i,j}$ calculées par la PIV, il est possible d'évaluer en chaque zone d'interrogation (x_i, y_j) la valeur de $\psi_{i,j}$ en utilisant l'expression approchée suivante :

$$\psi_{i,j} = \int_0^{y_j} u \partial y \approx \sum_{k=1}^{k=j} \frac{8u_{i,k} - u_{i,k+1} + 5u_{i,k-1}}{12} \Delta y \quad [15]$$

où Δy est la dimension réelle de la zone d'interrogation.

Par interpolation on calcul ensuite les isovaleurs de $\psi_{i,j}$ à l'aide d'un logiciel graphique. Les résultats ainsi obtenus sont tracés sur la figure 8. Celle-ci représente les lignes de courant pour un observateur en mouvement relatif avec la plaque (référentiel \mathfrak{R}). Elle sera comparée ultérieurement à la solution du modèle Newtonien.

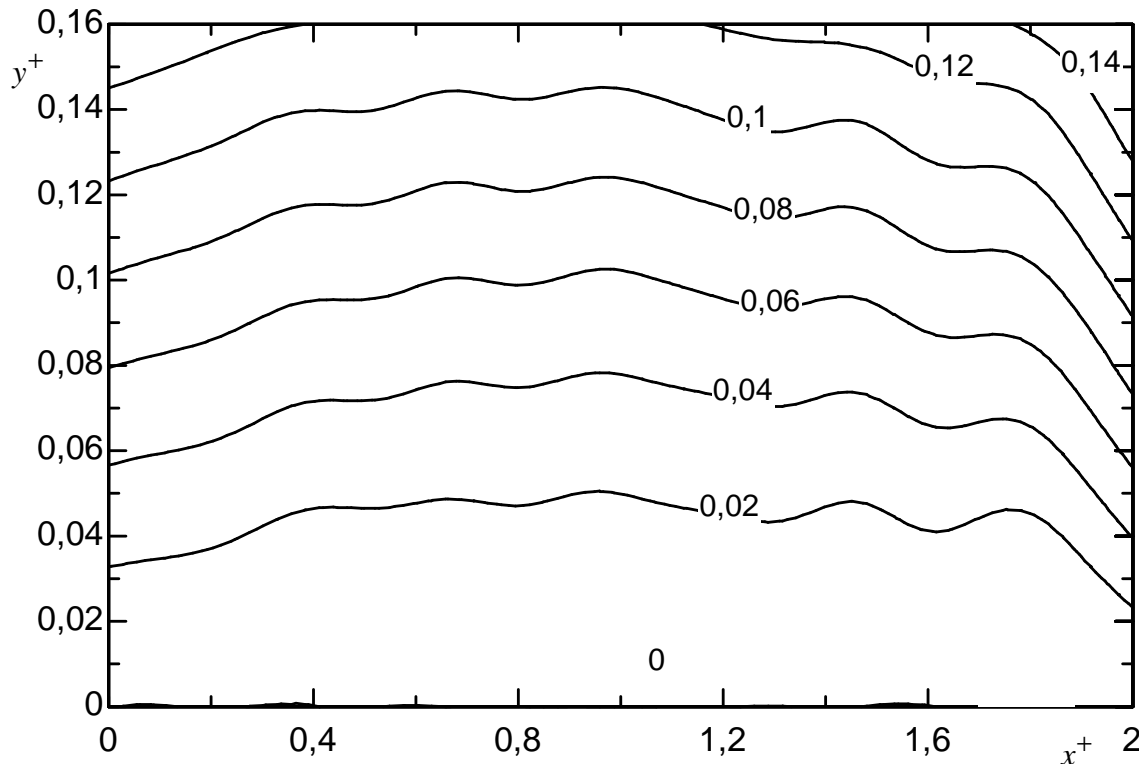


Figure 8 : Fonction de courant pour un observateur en mouvement relatif avec la plaque (référentiel \mathfrak{R})

$$Re = 4,01 \times 10^{-6} \quad ; \quad S = 1,04 \times 10^{-7} \quad ; \quad Od = 38,6$$

Notons enfin que les résultats présentés sur les figures 8 sont obtenus après plusieurs calculs numériques. Les erreurs ne peuvent donc que s'accumuler. Passant d'abord par les erreurs du calcul de la PIV (estimées à 10% sur les vitesses), puis les erreurs dues à l'intégration numérique des profils de vitesse et enfin l'erreur commise lors de l'interpolation. On peut aussi rajouter à ces erreurs celles de y ($\approx 0,3\text{mm}$) et x ($\approx 1\text{mm}$). Cela explique en partie les adulations des courbes autour d'une valeur moyenne. Mais dans tous les cas, les résultats restent très utiles pour apprécier la forme générale de l'écoulement

6 Théories et comparaisons

6.1 Force de traînée

6.1.1 Analyse basée sur le modèle Newtonien (Tomotika et Aoi 1952)

En se basant sur l'équation d'Ossen (1910), Tomotika et Aoi 1952 donnent dans le cas d'un modèle Newtonien, l'expression de C_D en fonction du nombre de Reynolds (Eq.(1)) avec une erreur de l'ordre $O(Re^4)$:

$$C_D = \frac{4\pi}{ReD} \left[1 - \frac{1}{D} \left(D^2 - D - \frac{5}{12} \right) \frac{Re^2}{128} - \frac{1}{D^2} \left(D^4 + \frac{1}{12} D^3 - \frac{23}{24} D^2 - \frac{133}{360} D - \frac{25}{144} \right) \frac{Re^4}{128^2} \right] \quad [16]$$

où

$$D(Re) = 1 - \ln \left(\gamma \frac{Re}{16} \right) \quad [17]$$

$\gamma = e^C$ et $C = 0.577215665\dots$ est la constante d'Euler.

Posons comme dans le cas où l'objet solide est une sphère et le fluide obéit au modèle d'Herschel-Bulkley (cf. Anley et Duplessis 1967 et Beaulne et Mitsoulis 1997) :

$$Q = \frac{Re}{1+k Od} \quad [18]$$

où k est une constante indéfinie

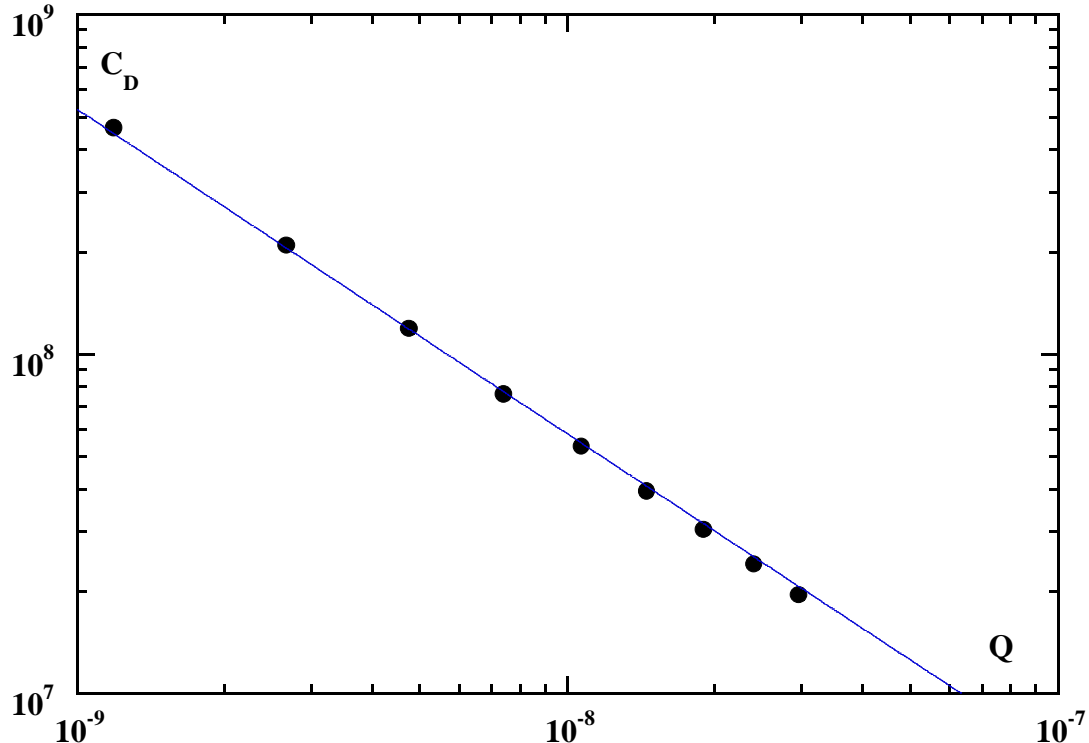


Figure 9 : Comparaison entre les mesures du coefficient de traînée et la théorie basée sur la solution du modèle Newtonien ($k \approx 4.1$)

● mesures, (—) Théorie (Eq. (16) avec $Q \equiv Re$)

Supposons maintenant dans le cas général d'un modèle d'Herschel-Bulkley que l'influence des termes visqueux et plastique sur le coefficient de traînée peut être représenté tout simplement par la relation (7) relative au cas Newtonien en prenant Q en place de Re (Eq.(1)).

Pour vérifier l'hypothèse, on représente sur la figure (9) les mesures et la théorie sous la forme $C_D(Q)$. En apparence l'accord est satisfaisant (l'écart maximal est de 5.2% pour $k = 4.1$), mais en réalité ce n'est pas vraiment le cas.

En effet, le piège est qu'on est amené à tracer sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées des fonctions pratiquement explicites de U_0 où la force de traînée n'apparaît pas, ou au moins presque. Car dans notre cas C_D ne varie quasiment qu'avec la vitesse puisque f_D change très peu. De plus le nombre de Reynolds est indépendant de la force de traînée. Ce qui fait que f_D n'apparaît pas distinctement dans les deux axes. Par conséquent, il n'est pas possible de bien confirmer actuellement l'hypothèse.

6.1.2 Analyse basée sur le modèle de Bingham (Piau 2001)

Comme déjà signalé dans l'introduction, Piau (2001) a établi une analyse théorique du problème des écoulements autour d'une plaque solide en translation rectiligne et uniforme dans un domaine indéfini. L'auteur considère exclusivement le cas d'un modèle de Bingham. Il suppose que les vitesses sont très faibles pour que les niveaux des contraintes à l'intérieur de l'écoulement soient proches du plateau plastique. Il suppose également que les dimensions transversales de l'écoulement sont très petite devant les dimensions longitudinales et que loin de l'objet solide le gel est considéré en déformation élastique suivant le modèle d'élasticité linéaire de Hooke. Cette dernière a permis d'exprimer le gradient de pression qui remplace la condition de l'écoulement irrationnel du modèle Newtonien.

Dans ces conditions, on peut exprimer le coefficient de traînée plastique C_D^s comme suit

$$C_D^s = 1 + C_{vd}(Od_B) \times \sqrt{\frac{1}{Od_B}} \quad [19]$$

Le nombre d'Oldroyd peut être déduit à partir de l'équation (11) en remplaçant $n = 1$ et la consistance K par la viscosité de Bingham μ , c'est à dire :

$$Od_B = \frac{s a}{\mu U_0} \quad [20]$$

$C_{vd}(Od_B) = 2/\sqrt{\pi} \approx 1.128$ si la couche limite est uniforme. Mais la forme physique la plus probable de la couche limite est celle qui ressemble à une lentille. Dans ce cas, en rapprochant le gradient de pression à une valeur constante, Piau obtient une solution exacte. Sinon, l'auteur propose une solution optimale avec une épaisseur de la couche limite non nulle aux deux extrémités de la plaque. Nous retenons ici cette dernière approximation, on a :

$$C_{vd}(Od_B) = \frac{8}{\pi X_1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \left(\sqrt{\frac{\Delta_0}{1-\Delta_0}} \right) \right) \sqrt{\frac{3(1+2\zeta)}{\pi}} \quad [21]$$

avec

$$\frac{1}{Od_B} = \frac{2^8}{3\pi^7} \frac{(1+3\zeta)^2}{(1+2\zeta)^3 X_1^4} \quad \text{et} \quad X_1 = \frac{2}{\pi} \left(\sqrt{\Delta_0(1-\Delta_0)} + \arctg \left(\sqrt{\frac{1-\Delta_0}{\Delta_0}} \right) \right) \quad [22]$$

Δ_0 obéit à l'équation suivante :

$$\Delta_0 = \frac{4}{(1+2\zeta)G} \left[1+3\zeta + \sqrt{(1+3\zeta)^2 - \frac{G}{8}(1+2\zeta)(3+10\zeta)} \right] \quad [23]$$

où G est un paramètre d'ajustement des courbes de pression (écoulement et déformation élastique) évalué à environ 17. Notons que la quantité $C_{vd}(Od_B)$ est une fonction décroissante de Od_B . Elle varie entre 0.948 et 1.502 lorsque Od_B varie entre 1 et l'infini ($+\infty$).

Essayons maintenant d'examiner la possibilité de confondre aux faibles gradients de vitesse le modèle d'Herschel-Bulkley avec le modèle de Bingham. On peut alors s'interroger sur la question suivante : pour la même valeur du seuil de contrainte, qu'elle est la viscosité de Bingham qui donne le meilleur accord entre la théorie et les mesures de la traînée et les mesures rhéométriques sont-ils bien représentées avec cette viscosité?

Sur la figure (10) on représente la variation de la quantité $C_D^s - 1$ avec le nombre d'Oldroyd. La courbe théorique est obtenue par la résolution numérique, pour chaque valeur expérimentale de Od_B , les équations (21), (22) et (23). On peut alors remarquer que l'écart entre la théorie et les mesures est considérable. Par la méthode des moindres carrés, on obtient une valeur optimale de μ égale à $2070 Pa.s$ correspond à un écart maximal de 31%. Avec cette valeur de μ , ζ varie dans notre cas entre -0.367 et -0.352 , Od_B entre 33 et 165.2, et C_{vd} entre 1.256 et 1.360.

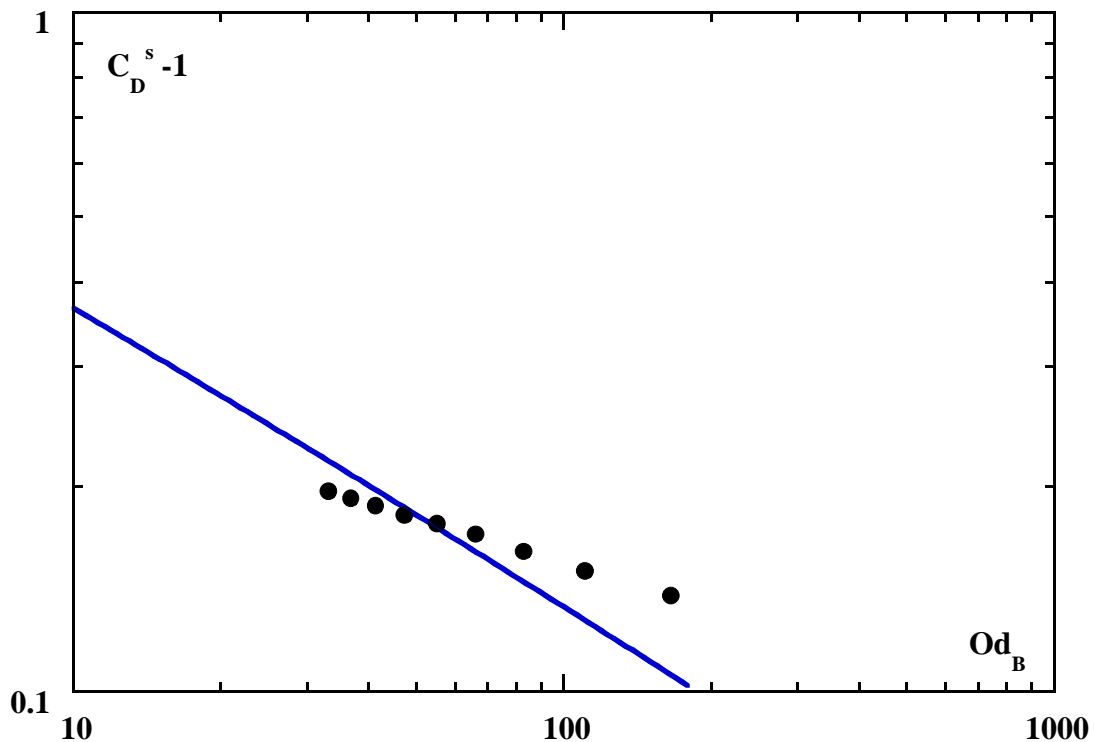


Figure 10 : Comparaison des mesures de la traînée à la théorie du modèle de Bingham avec $\mu = 2070 Pa.s$ et $s = 57 Pa$; ● expérience, (—) Théorie

D'autre part, sur la figure (10) relative aux mesures rhéométriques, on a également tracé la loi de Bingham calculée avec $\mu = 2070 Pa.s$. On obtient le même écart maximal (c'est à dire de 31%) lorsque le gradient de vitesse est inférieur à environ $0.011 s^{-1}$. Remarquons sur la

figure (7) qui représente les profils de vitesses qu'on a un gradient de vitesse moyen à la paroi du même ordre de grandeur (environ 0.017 s^{-1} au centre de la plaque). Mais d'une manière générale, ces résultats montrent surtout l'intérêt de prendre en considération la rhéofluidification du fluide même aux faibles vitesses d'écoulement.

6.2 Champ de vitesse

6.2.1 Identification de l'écoulement à la solution du modèle Newtonien

Un point également intéressant qu'on va maintenant examiner porte sur la possibilité d'identifier l'écoulement d'un fluide viscoplastique à l'écoulement d'un fluide visqueux. En se référant au travail de Tomotika et Aoi 1952, il est possible d'écrire la première approximation de l'équation d'Ossen relative au cas d'un modèle Newtonien (valable pour $Re \ll 1$), sous la forme suivante :

$$\frac{x^{+2}}{\lambda(\chi^+, y^+, Re) + 1} + \frac{y^{+2}}{\lambda(\chi^+, y^+, Re)} = 1 \quad \text{avec} \quad \lambda(\chi^+, y^+, Re) = \sinh^2\left(\frac{D(Re) \psi^+}{y^+}\right) \quad [24]$$

Pour pouvoir comparer cette solution aux résultats des mesures, on définit le nombre de Reynolds apparent « Re_{app} » comme dans le cas visqueux (Eq. (1)) en prenant μ_{app} à la place de μ , où μ_{app} est la viscosité apparente prise comme suit :

$$\mu_{app} = \frac{s}{\dot{\gamma}_{app}} + k(\dot{\gamma}_{app})^n \quad \text{avec} \quad \dot{\gamma}_{app} \approx \frac{U_0}{y_\infty} \quad [25]$$

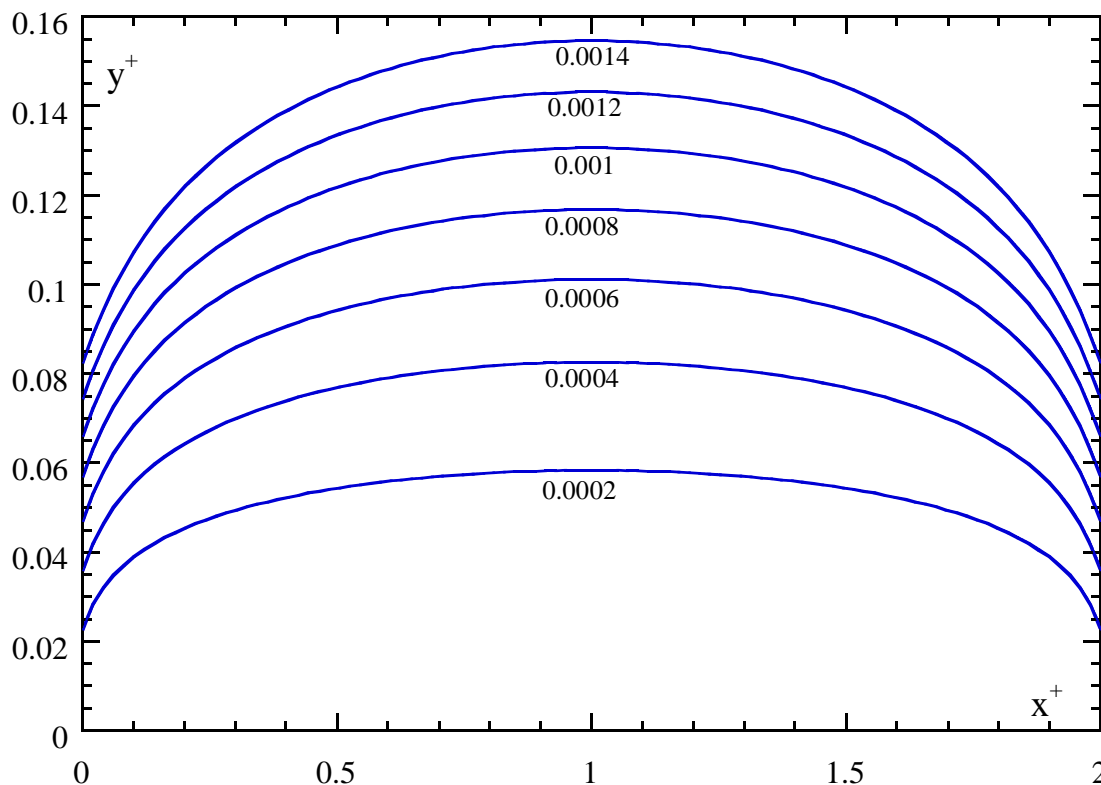


Figure 11 : Fonction de courant pour un observateur en mouvement relatif avec la plaque dans le cas visqueux avec $Re \equiv Re_{app} \approx 10^{-6}$

y_∞ est l'épaisseur de la couche limite ($\approx 16\text{mm}$ au centre de la plaque). On déduit $Re_{app} \approx 10^{-6}$.

Avec cette valeur du nombre de Reynolds, la relation (24) est tracée sur la figure 11. Elle peut être comparée à la figure 8. On obtient d'une manière générale la même allure des lignes de courant avec une forme beaucoup plus aplatie dans le cas d'un fluide viscoplastique et des valeurs numériques de ψ^+ 100 fois plus petites dans le cas visqueux. C'est comme s'il fallait diviser en plus $D(Re_{app})$ par 100 pour avoir le même ordre de grandeur de ψ^+ . Ces différences montrent ainsi le caractère spécifique de l'écoulement d'un fluide viscoplastique.

6.2.2 Identification de l'écoulement à la solution du modèle de Bingham

D'une manière générale, Piau exprime la solution semblable des profils de vitesse, comme suit :

$$u^+(x^+, y^+) = F'(\eta) \quad \text{où} \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)} \quad [26]$$

avec :

$$F(\eta) = A \frac{\eta^4}{12} + B \frac{\eta^3}{6} + C \frac{\eta^2}{2} \quad [27]$$

où A, B et C sont des constantes d'intégrations déterminées par l'auteur exactement ou approximativement à partir des conditions aux limites. Notons que dans toutes les expressions qui suivront il est tout à fait correct de prendre $\eta_\infty = 1$ et de confondre ainsi l'épaisseur de la couche limite y_∞ avec δ .

(a) Cas d'une couche limite uniforme

On est dans ce cas lorsqu'on peut négliger les pentes de la couche limite et du gradient de pression. La solution satisfait l'ensemble des conditions aux limites, mais elle ne tient pas compte des singularités aux deux extrémités de la plaque. On a :

$$u^+(x^+, y^+) = \frac{\eta}{\eta_\infty} \left(2 - \frac{\eta}{\eta_\infty} \right) \quad \text{où} \quad \eta_\infty = \frac{y_\infty^+}{\delta_\infty^+} = \frac{y_\infty}{\delta_\infty} \quad [28]$$

avec

$$y_\infty^+ = \frac{y_\infty}{a} = \frac{\sqrt{\pi}}{Od_B^{1/2}} \quad [29]$$

Le gradient de vitesse à la paroi s'écrit, comme suit :

$$u_{,y^+}^+ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times Od_B^{1/2} \quad \text{ou} \quad u_{,y} = 2 \times \left(\frac{U_0}{y_\infty} \right) \quad [30]$$

On peut alors calculer à partir des équations (29) et (31) l'épaisseur de la couche limite et le gradient de vitesse à la paroi pour $Od_B \approx 35.8$ de la figure (7), on obtient $y_\infty \approx 29.6\text{mm}$ et $u_{,y} \approx 5.2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. L'expérience donne $y_\infty \approx 16 \text{ mm}$ et $u_{,y} \approx 17 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, soit 1.85 fois plus petit et 3.27 fois plus grand, respectivement.

(b) Cas d'une couche limite variable sous forme d'une lentille

Nous examinons ici la solution optimale. Les trois constantes A, B,C intervenants dans l'équation (27) s'expriment comme suit :

$$A = \frac{12}{\eta_\infty^3}(1+3\zeta) \quad B = -\frac{18}{\eta_\infty^2}\left(1+\frac{8}{3}\zeta\right) \quad C = \frac{6}{\eta_\infty}(1+2\zeta) \quad [31]$$

La condition $v=0$ (v est la vitesse transversale) le long de la couche limite est vérifiée approximativement. Au lieu que $F(\eta_\infty) = \eta_\infty$, on pose $F(\eta_\infty) = \eta_\infty(1+\zeta)$.

L'épaisseur de la couche limite obéit à l'équation implicite suivante :

$$\sqrt{\Delta(1-\Delta)} + \text{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\Delta}{\Delta}}\right) = \frac{\pi X_1}{2}|x^+ - 1| \quad [32]$$

avec $\Delta = \delta^+ / \delta_m^+$ où $\delta_m^+ \eta_\infty$ est l'épaisseur maximale de la couche limite (au centre de la plaque) égale à :

$$\delta_m^+ \eta_\infty = \sqrt{3\pi(1+2\zeta)} \quad Od_B^{-1/2} \quad [33]$$

Le gradient de vitesse au centre de la plaque prend l'expression suivante :

$$u_{,y^+}^+ = 2\sqrt{\frac{3(1+2\zeta)}{\pi}} \times Od_B^{1/2} \quad \text{ou} \quad u_{,y} = 6(1+2\zeta)\left(\frac{U_0}{\delta_m^+ \eta_\infty}\right) \quad [34]$$

Les expressions de ζ et X_1 sont déjà présentées dans le paragraphe (6.1.2)

En calculant d'après les équations (33) et (34) l'épaisseur de la couche limite et le gradient de vitesse au centre de la plaque avec $Od_B \approx 35.8$ et $\zeta \approx -0.366$ (paramètres de la figure 7), on obtient $y_\infty \approx 26.6\text{mm}$ et $u_{,y} \approx 4.7 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. On pense que l'écart par rapport à l'expérience est surtout lié à la rhéofluidification du fluide qui n'a pas été tenue en compte dans cette approche théorique.

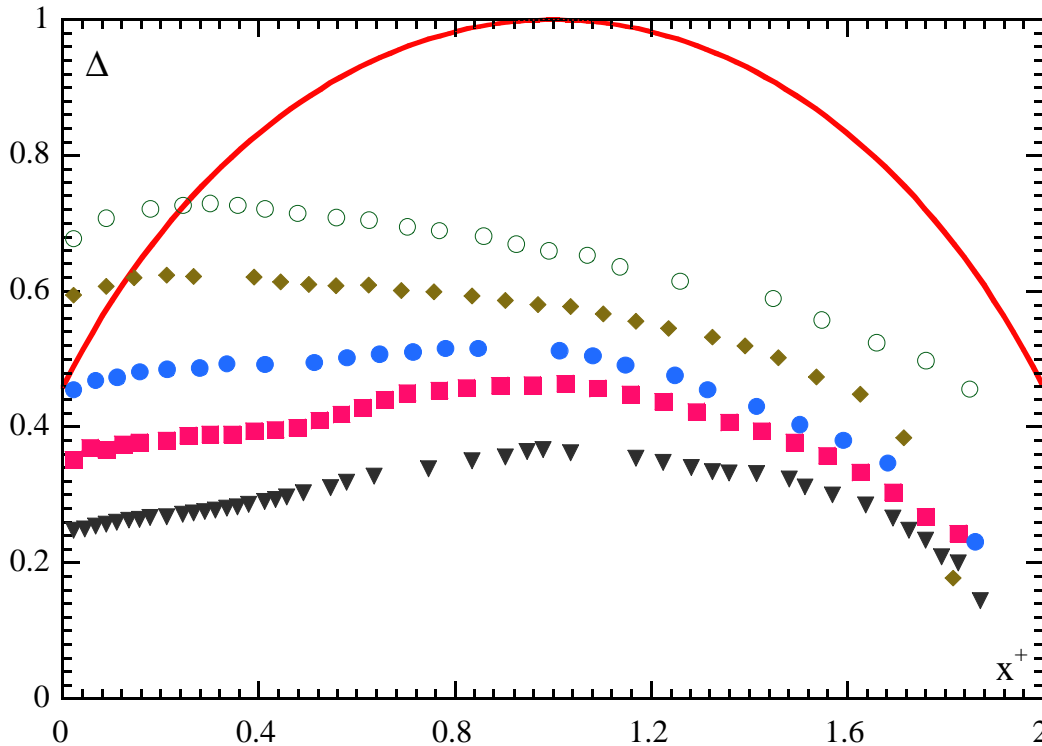


Figure 12 : Forme expérimentale de la couche limite déduite compte tenu des solutions semblables du profil de vitesse : comparaison avec la forme théorique

Expériences : \blacktriangledown $y^+ = 0.041$, \blacksquare $y^+ = 0.063$, \bullet $y^+ = 0.085$, \blacklozenge $y^+ = 0.119$, \circ $y^+ = 0.141$

— Théorie, $Od_B \approx 35.8$, $\zeta \approx -0.366$

Le moyen le plus direct et le plus sûr permettant de déterminer la forme expérimentale de la couche limite est de détecter sur les planches présentés en annexe la limite qui sépare la zone en écoulement est la zone rigide (ou en déformation élastique), c'est à dire la où le vecteur vitesse est nul. Mais vu les phénomènes qui se produisent loin de la plaque (les tourbillons), la tâche devient difficile. Il existe cependant un autre moyen qui permet au moins de vérifier la théorie. Le point de départ est de supposer que les profils de vitesse sont semblables et qu'ils obéissent à l'équation (26). Ainsi pour chaque valeur expérimentale $u_{i,j}$ de coordonnées (x_i, y_j) (calculée par la PIV), on peut se ramener à résoudre numériquement une équation de troisième degré pour déterminer la valeur de $\eta_{i,j}$ correspondante. Compte tenu de la définition de cette dernière variable et l'expression théorique de δ_m (Eq. (33)), on peut déduire la valeur de $\Delta_{i,j} = y_j / (\delta_m \eta_{i,j})$. Si la théorie est valable, le profil expérimental de la couche limite $\Delta_{i,j}(x_i)$ ainsi obtenu est le même quel que soit j (ou y_j) et il devrait obéir également au profil théorique (Eq. (32)).

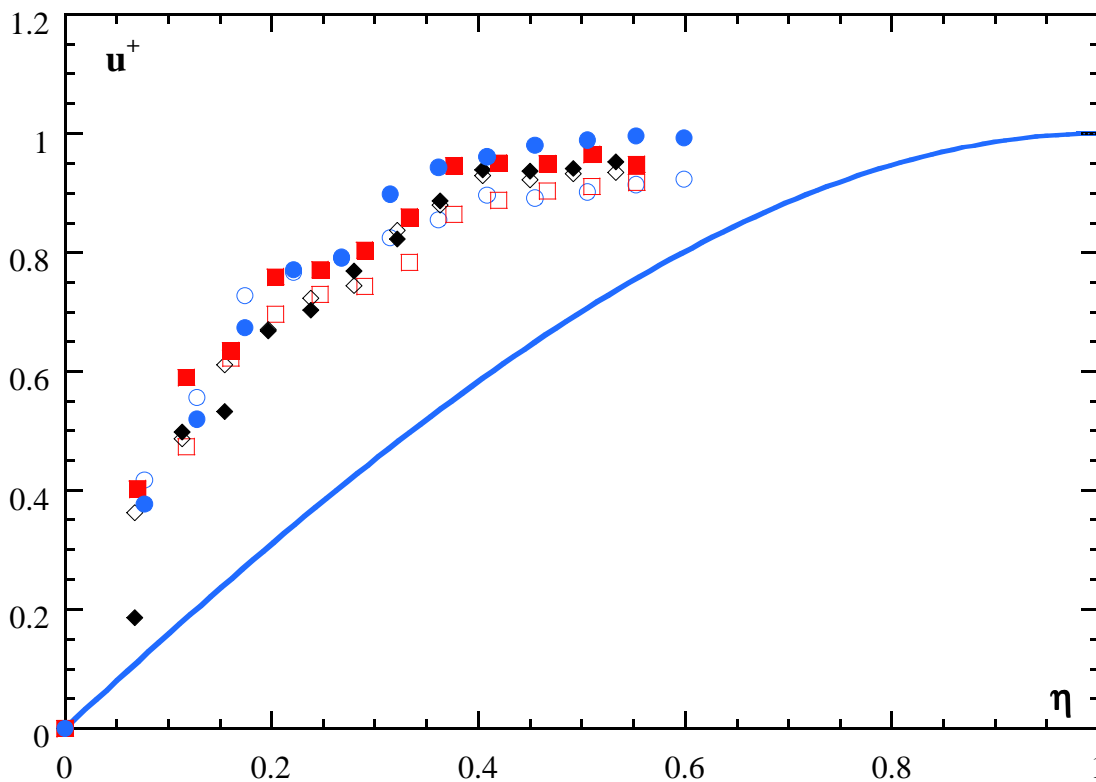


Figure 13 : Profils de vitesse en variables normalisées
Comparaison expérience théorie

Expériences : \circ $x^+ = 0.5$, \square $x^+ = 0.7$, \diamond $x^+ = 0.9$, \blacklozenge $x^+ = 1.1$, \blacksquare $x^+ = 1.3$, \bullet $x^+ = 1.5$
— Théorie, $Od_B \approx 35.8$, $\zeta \approx -0.366$

Les résultats des calculs sont présentés sur la figure (12). Les courbes expérimentales ne se superposent pas comme la théorie le prédit et l'écart avec le profil théorique est considérable, mais ceci n'est pas très surprenant vu la forte rhéofluidification de notre fluide. On peut également voir ici que l'écoulement n'est pas vraiment symétrique. En amont, les courbes changent complètement d'allure. La cause peut être due à l'épaisseur finie de la plaque. Néanmoins, il existe un résultat qui nous donne l'assurance de la fiabilité des hypothèses de la théorie. En effet, on a tendance à dire que la forme générale des profils

expérimentaux est la même que celle de la théorie, au moins à une certaine distance du bord d'attaque.

Enfin, sur la figure (13) on représente les profils de vitesse en variables normalisées, c'est à dire $u^+(\eta)$. Les valeurs expérimentales de η sont calculées connaissant y et δ . Cette dernière est obtenue, pour chaque valeur de x , par la résolution numériquement de l'équation implicite (32) et en utilisant l'expression théorique de δm (Eq. (33)). Compte tenu des écarts obtenus précédemment, seulement les profils situés loin des singularités ont été présentés. Les mesures sont comparées à la théorie (Eqs. (26), (27) et (31)) avec $\zeta = -0.366$.

7 Conclusion

Ce travail avait comme but de mieux comprendre le problème des l'écoulements à faibles vitesses des fluides viscoplastiques autour d'une plaque solide en translation rectiligne et uniforme dans un grand domaine.

Plusieurs phénomènes ont été mises en évidences. En particulier les deux tourbillons permanents (par rapport à un système d'axe lié à la plaque) qui se reproduisent en amont et à l'aval de l'objet et aussi le phénomène de glissement en contact du fluide avec les parois lisses.

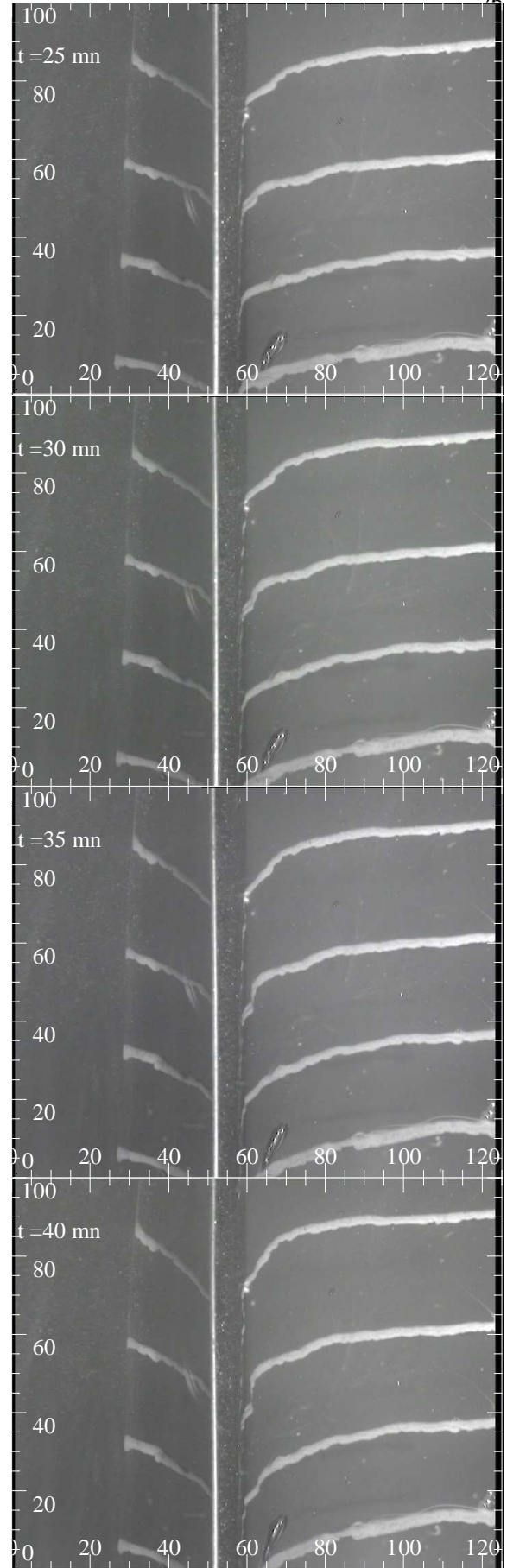
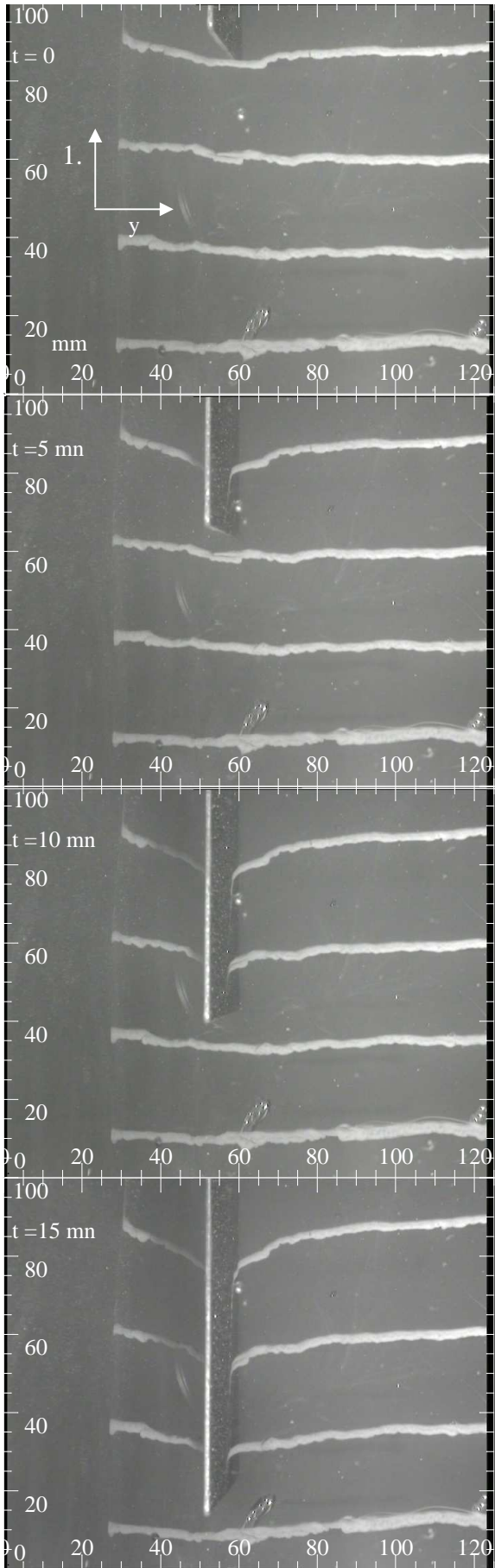
L'examen des résultats obtenus a montré également la déférence de l'écoulement par rapport au cas visqueux. La force de traînée dépend dans ce cas du nombre d'Oldroyd et non pas du nombre de Reynolds comme dans le cas Newtonien. De plus, les lignes de courants (par rapport à un référentiel fixe) ont une forme beaucoup plus aplatie dans le cas viscoplastique.

Pour cette raison, la nouvelle proposition de Piau (2001) qui tient compte du caractère spécifique du mouvement d'un fluide viscoplastique (ayant un comportement de Bingham) a été examinée. D'une manière générale, les mesures ont tendance à appuyer sur les hypothèses de calculs, mais elles montrent également la nécessité de prendre en compte la rhéofluidification du fluide.

Tenir compte de ce paramètre peut être considéré comme une perspective pour un travail futur.

Bibliographie

Annexe



Photographie 1: Identification de l'écoulement grâce à des marqueurs introduits horizontalement dans le fluide

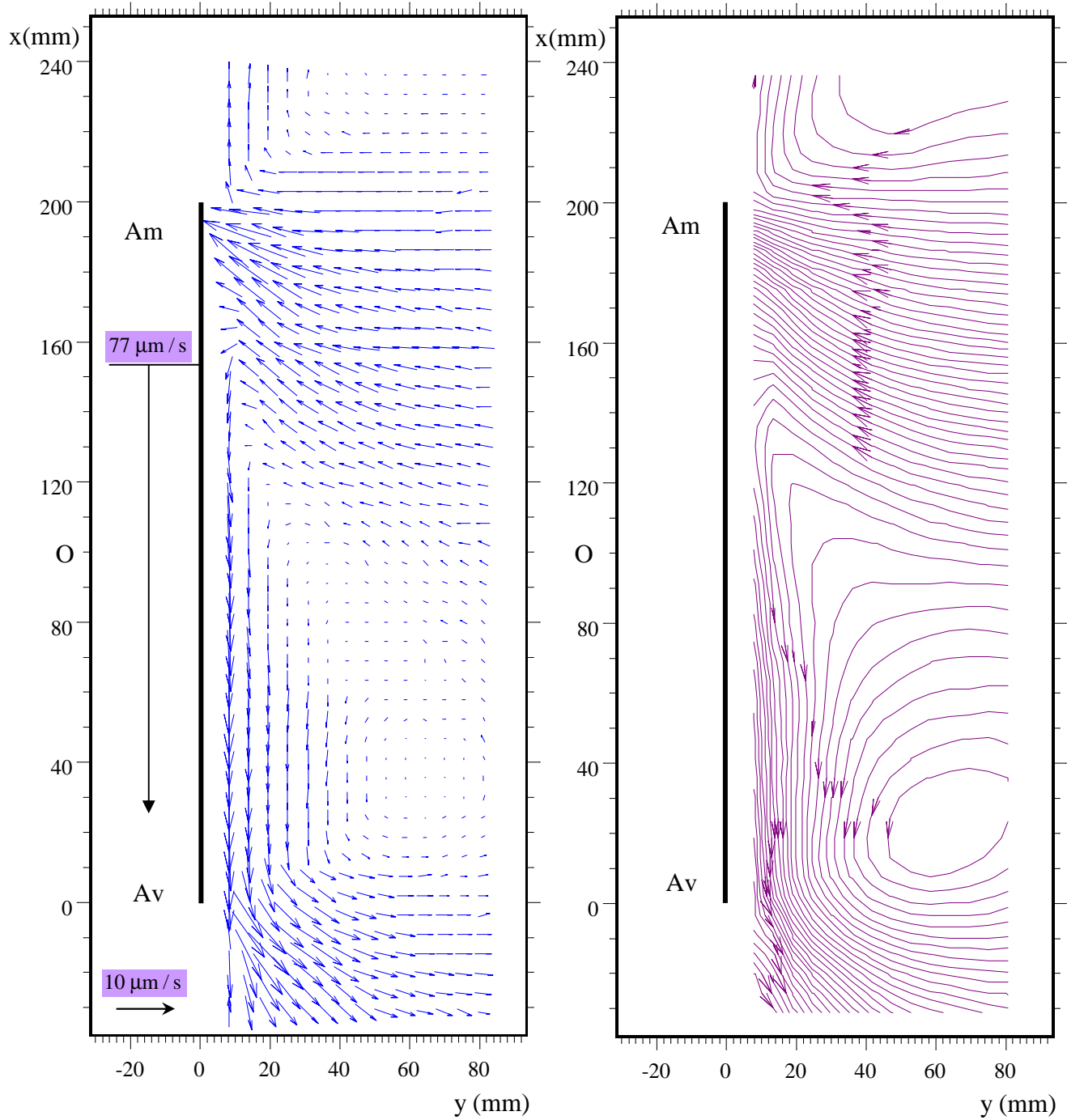


Planche 1 : Champ de vitesse et lignes de courant (par rapport au référentiel \mathcal{K} lié à la caméra) pour une vitesse de la plaque de $77 \mu\text{m/s}$ dans l'écoulement général :

$$Re = 4,01 \times 10^{-6} \quad ; \quad Re^s = 1.04 \times 10^{-7} \quad ; \quad Od = 38.6 \quad ; \quad F_D = 5.6 N$$

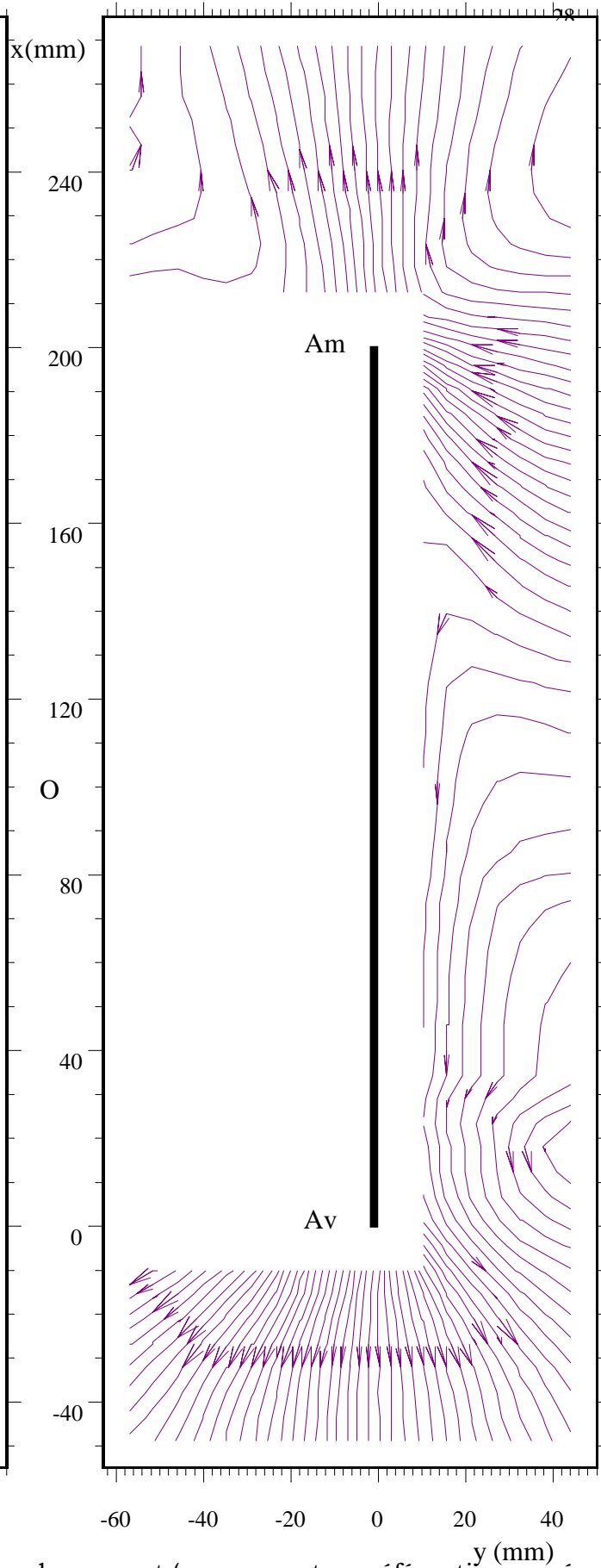
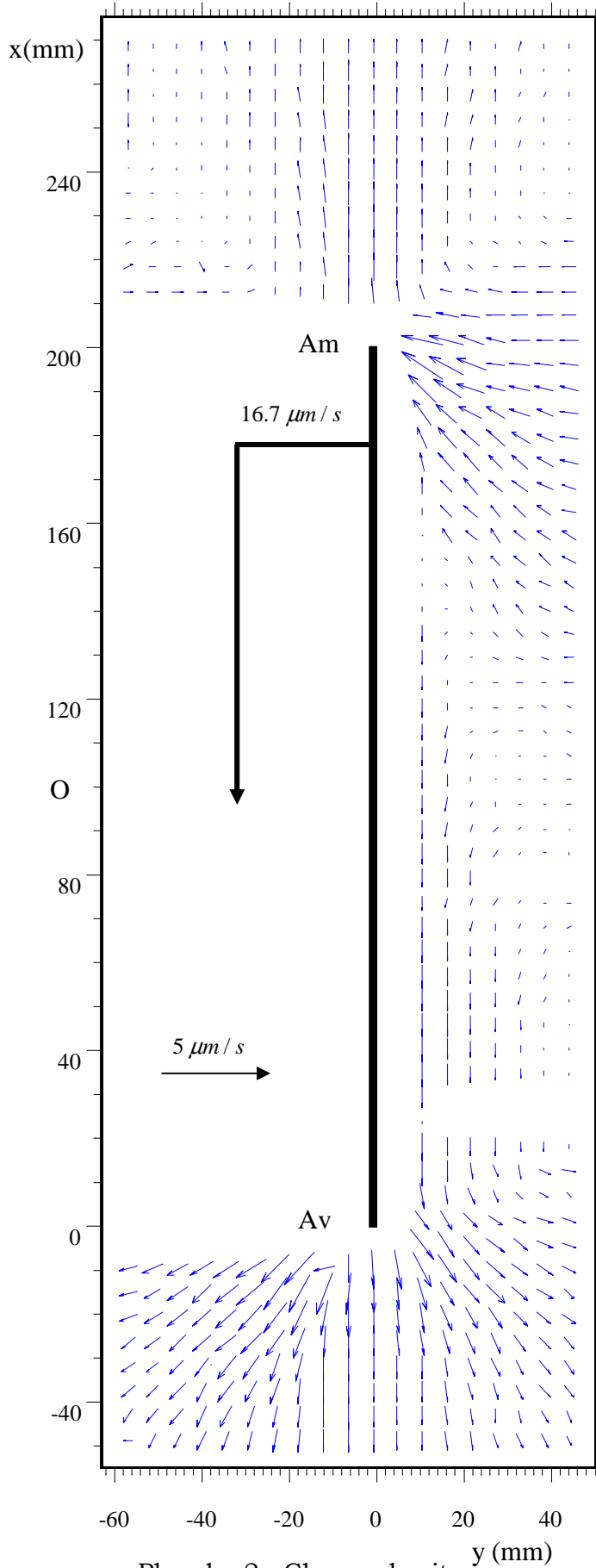


Planche 2 : Champ de vitesse et lignes de courant (par rapport au référentiel Σ lié à la caméra) pour une vitesse de la plaque de $16.7 \mu\text{m/s}$ dans l'écoulement général

$$Re = 3,13 \times 10^{-7} \quad ; \quad Re^s = 4.87.04 \times 10^{-9} \quad ; \quad Od = 64.3$$

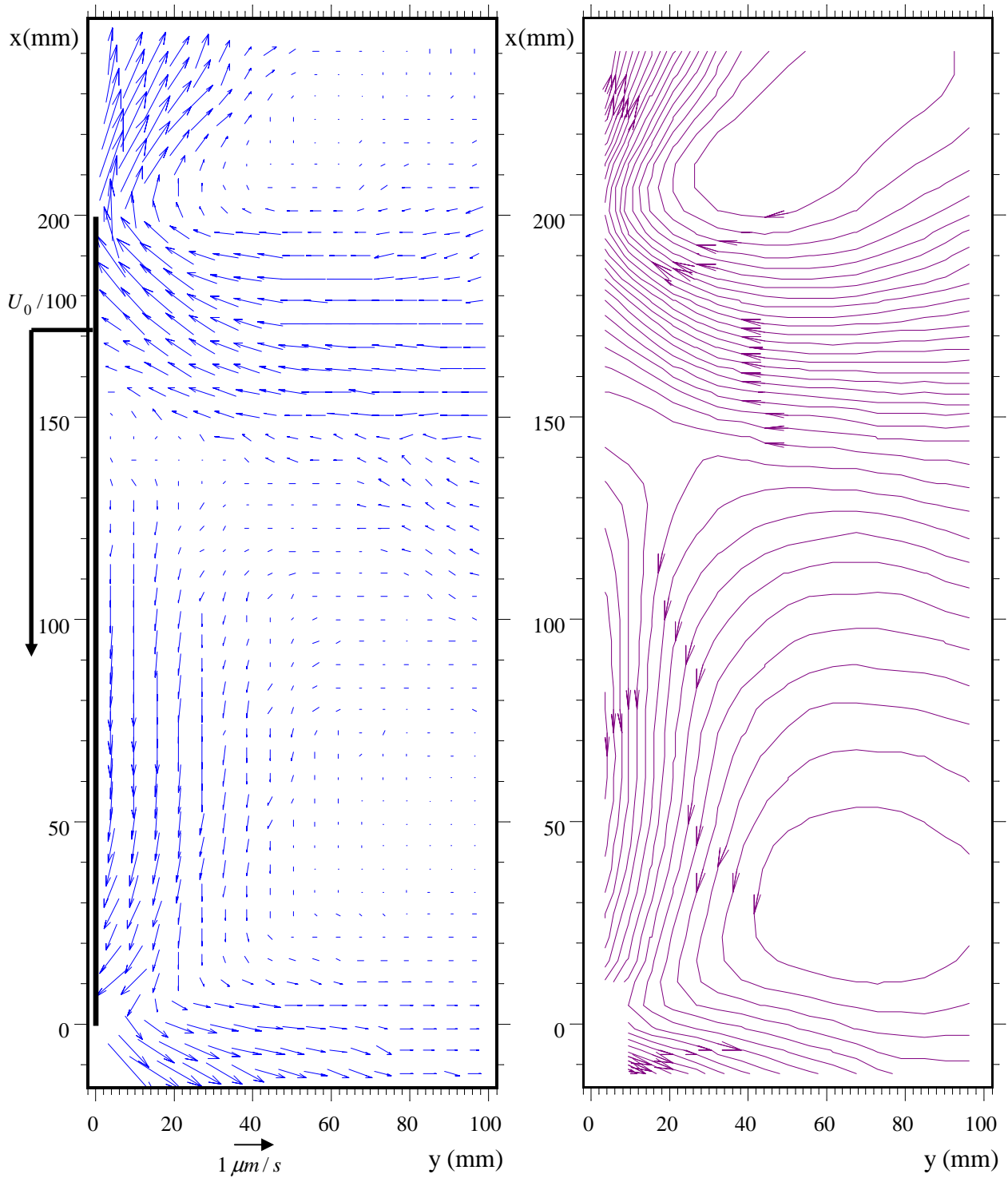


Planche 3: Champ de vitesse et lignes de courant (par rapport au référentiel \mathcal{R}^* lié à la caméra) pour une vitesse de la plaque de $83.3 \mu\text{m}/\text{s}$ avec glissement à la paroi

$$F_D = 1.5 N$$

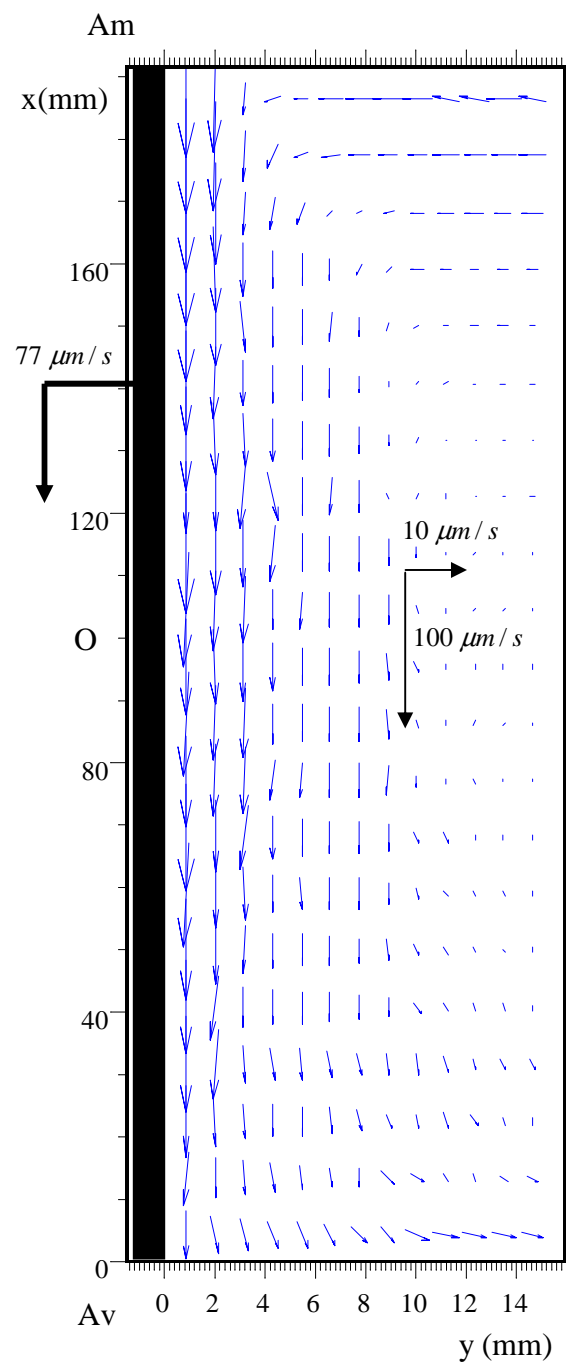


Planche 4 : Champ de vitesse (par rapport au référentiel \mathcal{R}^* lié à la caméra) pour une vitesse de la plaque de $77 \mu\text{m/s}$ dans l'écoulement au voisinage de la paroi :

$$Re = 4,01 \times 10^{-6} \quad ; \quad Re^s = 1,04 \times 10^{-7} \quad ; \quad Od = 38,6$$