

Développement d'un modèle unidirectionnel pour un écoulement à surface libre et un canal non prismatique de section et de pente variables

Khaled DEBIANE

Rhéohydro, SCOP 3BIS, Espace Vaucanson 82, rue Anatole France 38100
GRENOBLE, France

Tél : 00 33 (4) 76 84 64 05 Email : khaled.debiane@rheohydro.com

Résumé

Les inondations d'un fleuve ou d'un torrent peuvent avoir des effets dévastateurs en son voisinage et créent actuellement un sujet de discussion entre chercheurs, agents publiques et bureaux d'études dans différents pays. Leurs préoccupations légitimes actuelles et de savoir dans quelle mesure les modèles numériques 1D des écoulements à surface libre (démontrer dans cette étude pour des canaux prismatiques de sections rectangulaires), comme Hec-Ras de l'US Army, peuvent modéliser les inondations. L'objectif de cette étude est non pas seulement de répondre à cette question, mais aussi de présenter une formulation d'un nouveau modèle unidirectionnel qui tient compte des variations de sections avec les abscisses et les pentes des cours d'eau afin de mieux se rapprocher de la situation réelle du problème d'inondation dans un fleuve ou dans un torrent. Le modèle a été validé d'après les expériences de la littérature pour un écoulement dans un canal divergent.

I. Introduction

L'une des hypothèses de base de la modélisation mathématique des écoulements à surface libre équivaut à supposer que le mouvement se fait par tranches de fluide, que la répartition de la pression le long de la section transversale est hydrostatique et que la composante de vitesse locale suivant la direction de l'écoulement est uniforme sur toute la section transversale. Chaque tranche est représentée par un équilibre entre l'inertie d'une part, les forces d'Archimède d'autre part, et le frottement qui s'exerce le long des parois mouillées de l'ouvrage considéré. Ce sont aussi là, les hypothèses de l'approximation de l'eau peu profonde, désignée également en hydraulique par le modèle de Saint-Venant, valable pour de grandes longueurs d'ondes et nous montrerons dans cette étude qui est exact pour un canal prismatique de section rectangulaire de faible pente seulement.

Pour terminer la formulation mathématique, on est amené à faire le choix d'une loi de frottement. Une loi a priori simple consiste à considérer que le comportement de chaque tranche du fluide dans un écoulement graduellement varié (qui varie en temps et/ou en espace) est similaire au comportement de la même tranche dans un écoulement uniforme. Il convient ainsi de remplacer les frottements aux parois par les pertes de charge linéaires établies dans les conduites en régime établi ou dans le canal en régime uniforme pour définir complètement le problème.

Ce travail fournira la formulation d'un nouveau modèle unidirectionnel des écoulements à surface libre qui tient compte des variations de la section et de la pente le long de

l'écoulement. Nous illustrons l'application du modèle aux cas des écoulements dans les convergents et divergents pour un canal de section rectangulaire, nous validerons le modèle par des expériences de la littérature et nous montrons la différence apportée par rapport aux modèles 1D proposés dans la littérature.

II. Modèle unidirectionnel pour une section transversale plane

L'analyse présentée dans ce chapitre a été initiée par Piau (1996) pour les écoulements des fluides viscoplastiques dans un long domaine et pour une section plane. Une attention particulière a été consacrée à l'influence du seuil de plasticité. L'analyse a été développée dans la suite par Debiante (2000) pour les écoulements des fluides Newtoniens.

Nous nous intéressons alors dans cette étude au cas d'un fluide de comportement Newtonien. Nous supposons que les particules fluides sont animées d'un mouvement de vitesse \vec{u} relative à un repère Galiléen suivant la direction x . La composante de vitesse le long de cet axe est noté u . Les autres composantes sont v le long de l'axe y et w le long de l'axe z (figure 1).

Pour un écoulement isotherme, les équations de base sont celles de la mécanique des fluides : équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sous forme locale. Pour commencer, nous supposons que l'écoulement est laminaire et isochore. Ainsi, pour plusieurs substances comme l'eau, l'air et l'huile, le frottement interne peut être représenté par le troisième principe de Newton où la viscosité est le seul paramètre rhéologique.

Dans ces conditions, les équations du mouvement de Cauchy se réduisent aux équations de Navier-Stokes

$$\rho \vec{\ddot{u}} = \rho \vec{g} - \text{grad } p + 2\mu \text{div } \mathbf{D} \quad (1)$$

et l'équation de continuité

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad (2)$$

où ρ est la masse volumique, μ la viscosité, \vec{g} est l'accélération gravitationnelle, p est la pression et \mathbf{D} est le tenseur du taux de déformation.

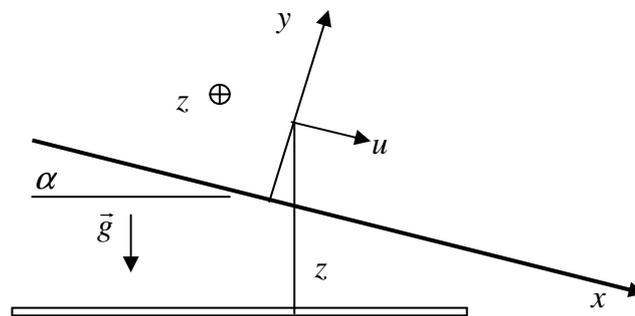


Figure 1 : Système de coordonnées utilisé

L'espace de l'écoulement est supposé être beaucoup plus large qu'il est épais « section transversale plane ». Il est raisonnable de réduire dans ce cas l'ensemble de ces équations aux

deux composantes dans la direction x et dans la direction y . Ces équations sont la formulation complète dans le cas de l'écoulement bidimensionnel dans le plan (x, y) , il résulte :

$$\rho(u_{,t} + uu_{,x} + vv_{,y}) = -p_{,x} + \rho g \sin(\alpha) + \mu(u_{,xx} + u_{,yy}) \quad (3)$$

$$\rho(v_{,t} + uv_{,x} + vv_{,y}) = -p_{,y} - \rho g \cos(\alpha) + \mu(v_{,xx} + v_{,yy}) \quad (4)$$

$$u_{,x} + v_{,y} = 0 \quad (5)$$

où α est la pente du canal (figure 1).

Deux dimensions caractéristiques de l'écoulement peuvent être considérées, L_0 dans la direction de la longueur, et h qui représente la profondeur d'eau. Un ensemble de variables adimensionnelles normalisées sont choisies (ordre de grandeur est 1). Des lettres capitales indiquent les variables normalisées.

Pour les coordonnées d'espace et de temps, elles sont choisies, comme suit

$$(X, Y, T) = \left(\frac{x}{L_0}, \frac{y}{\varepsilon L_0}, \frac{U_0}{L_0} t \right) \quad (6)$$

où la référence U_0 et le paramètre ε sont introduits. Ce paramètre ε est le rapport h/L_0 .

Les deux composantes réduites de vitesse (U et V) sont :

$$(U, V) = \left(\frac{u}{U_0}, \frac{v}{\varepsilon U_0} \right) \quad (7)$$

La composante v est normalisée par l'intermédiaire de l'équation de continuité.

En supposant que la pression hydrostatique donne la norme pour la pression, il vient :

$$P = \frac{p}{\rho g \varepsilon L} \quad (8)$$

Ainsi, en introduisant ces variables adimensionnelles, les équations du mouvement deviennent

$$U_{,T} + UU_{,X} + VU_{,Y} = -\frac{1}{\varepsilon Fr^2} (\varepsilon P_{,X} - \sin(\alpha)) + \frac{1}{Re} (\varepsilon^2 U_{,XX} + U_{,YY}) \quad (9)$$

$$\varepsilon^2 (V_{,T} + UV_{,X} + VV_{,Y}) = -\frac{1}{Fr^2} (P_{,Y} + \cos(\alpha)) + \frac{\varepsilon^2}{Re} (\varepsilon^2 V_{,XX} + V_{,YY}) \quad (10)$$

où Fr et Re sont respectivement, le nombre de Froude et le nombre de Reynolds :

$$Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gh}}; \quad Re = \frac{\rho U_0 h}{\mu} \frac{h}{L} \quad (11)$$

Notons que l'équation de conservation de la masse ne fait apparaître aucun nombre adimensionnel.

En limitant maintenant ces expressions au cas spécifique où ε est petit devant 1, il vient :

$$U_{,T} + UU_{,X} + VU_{,Y} = -\frac{1}{\varepsilon Fr^2} (\varepsilon P_{,X} - \sin(\alpha)) + \frac{1}{Re} (O(\varepsilon^2) + U_{,YY}) \quad (12)$$

$$O(\varepsilon^2) = -\frac{1}{Fr^2} (P_{,Y} + \cos(\alpha)) + O(\varepsilon^2) \quad (13)$$

En associant ces deux équations, il apparaît que l'inertie, la pression, la gravité et le frottement visqueux ont les ordres de grandeur : 1, $1/ Fr^2$, $1/ Fr^2$, $1/ Re$, respectivement. Si Re n'est pas petit, on obtient à l'ordre $O(\varepsilon^2)$

$$\rho(u_{,t} + uu_{,x} + vu_{,y}) = -p_{,x} + \rho g \sin(\alpha) + \mu u_{,yy} + O(\varepsilon^2) \quad (14)$$

$$p_{,y} = -\rho g \cos(\alpha) \quad (15)$$

Négligeant l'effet de la tension superficielle, l'équation (15) peut être alors intégrée le long de y , soit :

$$p = \rho g(h - y) + p_0 \quad (16)$$

où p_0 est la pression atmosphérique. Il résulte que la répartition de la pression le long de y est hydrostatique.

En utilisant l'équation (16), l'équation (14) peut être réécrite comme suit :

$$\rho(u_{,t} + uu_{,x} + vu_{,y}) = -\rho g \cos(\alpha) h_{,x} + \rho g \sin(\alpha) + \mu u_{,yy} + O(\varepsilon^2) \quad (17)$$

Cette équation constitue la forme simplifiée des équations de Navier-Stokes dans l'approximation d'un domaine très long et une section plane.

Le modèle unidirectionnel s'agit des mêmes équations de conservation que précédemment mais écrites pour des valeurs moyennes dans une section.

En appliquant le principe de conservation de la masse à un domaine délimité par deux sections transversales, S_x et S_{x+dx} , et en supposant que le système est fermé, i.e qu'il n'existe pas un débit entrant ou sortant de ce domaine (il n'y a pas du débordement de l'eau par-dessous de la berge par exemple), on obtient une formulation globale du principe de la conservation de la masse, soit :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

où $Q = SU$ est le débit global traversant la section mouillée S , et U étant la vitesse moyenne.

Pour une section rectangulaire de largeur b , on a $S = bh$. Il est avantageux dans ce cas d'introduire un débit par unité de largeur du canal ' q ', tel que $q = Q/b$.

Ainsi, l'équation (18) se récrit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

ou bien

$$h_{,t} + hU_{,x} + Uh_{,x} = 0 \quad (20)$$

avec

$$U = \frac{\int_0^h u dy}{h} \quad (21)$$

La forme globale de l'équation dynamique peut être obtenue directement en intégrant l'équation (17) de $y = 0$ à $y = h(x, t)$. En utilisant la règle de Leibnitz pour la dérivation sous le signe intégral, il résulte :

$$U_{,t} + \beta U U_{,x} + (1 - \beta) U h_{,t} + g \cos(\alpha) h_{,x} = -\frac{\tau_w}{\rho h} + g \sin(\alpha) + O(\varepsilon^2) \quad (22)$$

où β est un coefficient de forme qui tient compte de non répartition uniforme de la vitesse le long de (Oy).

$$\beta = \frac{\int_0^h u^2 dy}{hU^2} \quad (23)$$

Ce coefficient dépend du nombre de Reynolds : ≈ 1.03 pour l'écoulement turbulent et ≈ 1.2 pour l'écoulement laminaire.

$\tau_w = \mu(u_{,y})_{y=0}$ est la contrainte tangentielle à la paroi. Remarquons que le ralentissement visqueux du fluide par les parois est le seul responsable des forces de frottement, cela reste vraie dans l'hypothèse que le frottement entre l'air et le fluide est négligeable.

Sans le terme de frottement J et en posant $\beta = 1$, les équations (20) et (22) représentent la formulation 1D de Saint-Venant.

Pour évaluer J , nous reprenons l'hypothèse classique qui consiste à supposer que la profondeur du fluide varie progressivement pour que l'écoulement peut être représenté par son équivalence en écoulement uniforme.

Ainsi, pour un écoulement uniforme, l'équation (14) donne le profil suivant de la vitesse locale :

$$u = \frac{\rho g}{\mu} J \left[hy - \frac{1}{2} y^2 \right] \quad (24)$$

On déduit que le paramètre de forme β égal à 1.2, que

$$J = \frac{3\mu U}{\rho g h^2} = \frac{3\mu q}{\rho g h^3} \quad (25)$$

Et que la vitesse à la surface libre U_s égale

$$U_s = \frac{3}{2} U \quad (26)$$

Notons que la même loi de frottement (25) a été utilisée par Hunt (1994), Aguirre-PE (1995), Debiante (2000), Chanson (2006) et aussi par d'autres investigateurs pour étudier les écoulements laminaires des fluides géologiques. Aguirre-PE et Chanson proposent de la multiplier par un coefficient correcteur.

Ces trois dernières équations ne sont valables que pour un écoulement laminaire. La vitesse locale à la surface libre pour un écoulement turbulent varie entre 1.11 et 1.25 de la vitesse moyenne.

III. Modèle unidirectionnel pour un canal non prismatique et une section transversale quelconque

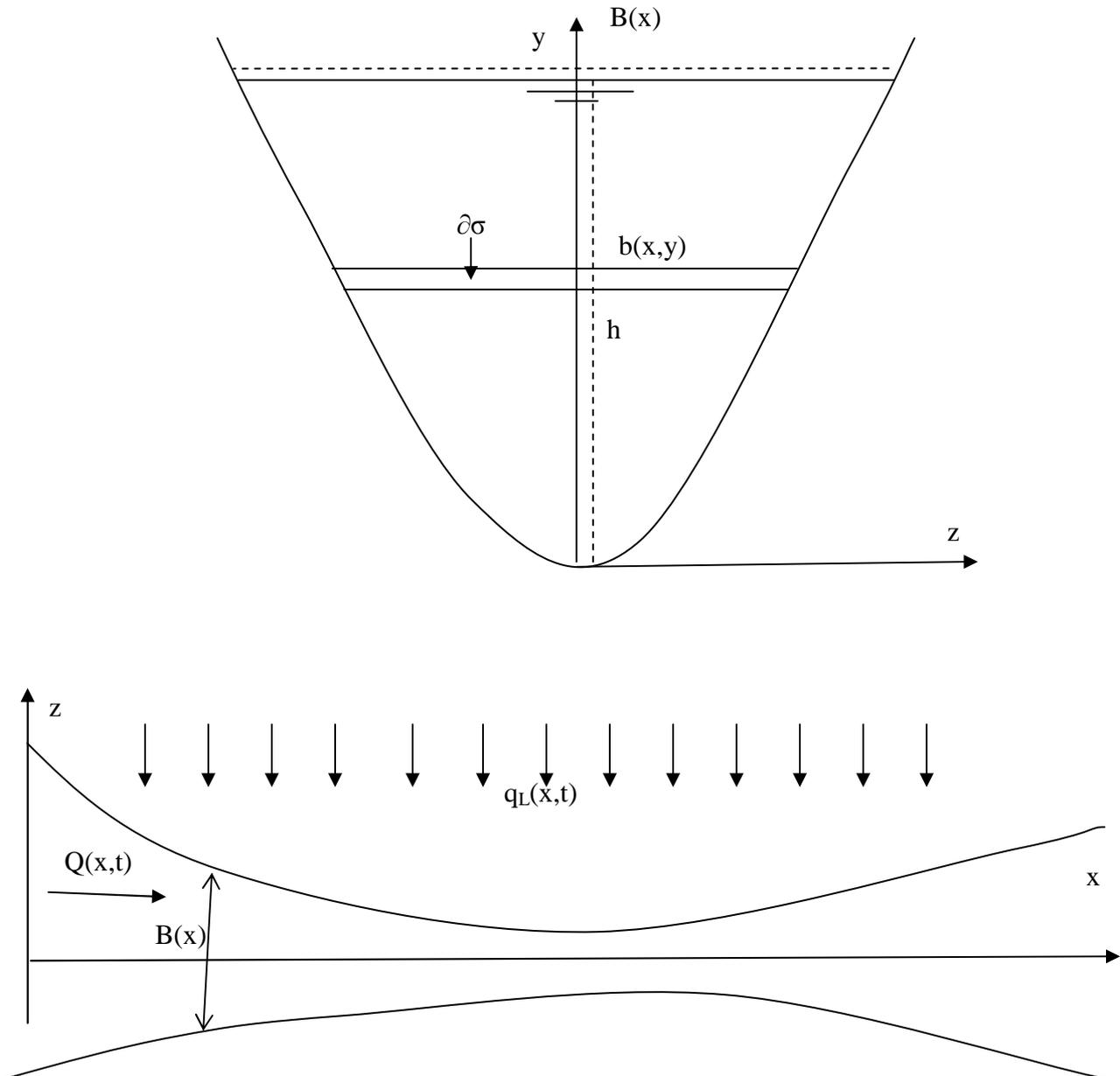


Figure 2 : Formes régulières de la section transversale et du canal

On suppose que l'écoulement est organisé par rapport à une direction préférentielle (Ox) que l'on nomme « axe de l'écoulement ». On suppose également que le fluide est incompressible, que le canal est imperméable et que les effets de la tension superficielle et le glissement sont négligeables.

Considérons une section transversale de forme quelconque, mais qui reste assez régulière et voisine de la forme présentée sur la figure 2. Considérons également un canal non prismatique

de forme régulière (figure 2) et de pente α portant un débit variable en temps et en espace $Q(t,x)$. Le débit est défini, comme suit :

$$Q(t, x) = \iint_S u d\sigma \quad (27)$$

Avec $d\sigma = b(x, y) dy$

Comme hypothèse, qui ne vérifie pas parfaitement la condition d'adhérence aux parois latérales, mais qui reste approximativement valable, on suppose que u ne dépend pas de z dans l'expression du débit, il vient d'après l'équation (27) :

$$Q(t, x) = \int_0^{h(x,t)} u b dy \quad (28)$$

Le débit latéral q_L s'exprime comme la différence entre le débit entrant et le débit sortant du système, soit :

$$q_L(t, x) = q_{entrant} - q_{sor \text{ tant}} \quad (29)$$

↙

Ex. pluie, apport latéral...

↘

Ex. infiltration, débordement par-dessus la berge, prélèvement latéral ...

En négligeant la variation de la composante de vitesse w avec z , l'expression locale du principe de conservation de la masse pour un fluide incompressible est la suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (30)$$

Et sous sa forme globale, on a :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_L \quad (31)$$

Qui peut être obtenue en appliquant la conservation du volume de fluide à un domaine délimité par deux sections transversales, x et $x+dx$.

Multipliant l'équation (30) par $b(x,y)$ et intégrant ensuite par rapport à y de 0 à h en utilisant la règle de Leibnitz pour la dérivation sous le signe intégrale. Cette règle dit que la dérivée d'une intégrale aux bornes variables fait apparaître une dérivée à l'intérieur de l'intégrale et des termes de flux suivant la formule :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0(x)}^{z_1(x)} F dy = \int_{z_0(x)}^{z_1(x)} \frac{\partial F}{\partial x} dy + F(y = z_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} - F(y = z_2) \frac{\partial z_2}{\partial x} \quad (32)$$

Il résulte :

$$B v(y = h) = \int_0^h v \frac{\partial b}{\partial y} dy + \int_0^h u \frac{\partial b}{\partial x} dy - \frac{\partial Q}{\partial x} + B U_s \frac{\partial h}{\partial x} \quad (33)$$

Où $v(y = h)$ et U_s sont respectivement les composante v et u de la vitesse à la surface libre ($y=h$). B est la largeur miroir

En tenant maintenant compte dans l'équation dynamique de la variation de u avec z , il vient suivant l'axe de l'écoulement :

$$\text{Inertie} = \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[\beta Q U] - U_s q_L}_{\text{Termes classiques}} + \underbrace{\int_0^h u(U_s - u) \frac{\partial b}{\partial x} dy + \int_0^h v(U_s - u) \frac{\partial b}{\partial y} dy}_{\text{Termes supplémentaires}} \quad (44)$$

Il apparaît des termes supplémentaires dus à la variation de b suivant x et y en plus des termes classiques déjà connus. Le flux de quantité de mouvement $U_s q$ s'exprime comme suit $\lambda U q$ ($U_s = \lambda U$). On rappelle que pour une section plane λ varie entre 1.11 et 1.25 en écoulement turbulent et que $\lambda = 1.5$ pour un écoulement laminaire.

Multipliant maintenant le deuxième terme de l'équation (35) par b et intégrant par rapport à y de 0 à h , il vient :

$$\text{Forces d'Archimed} = -g S \left(\cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} - \sin(\alpha) \right) \quad (45)$$

Et

$$\text{Perte de charge linéaire} = -g S J \quad \text{avec} \quad J = -\frac{\mu}{\rho g S} \int_0^h b (u_{,yy} + u_{,zz}) dy \quad (46)$$

Ainsi, on obtient le modèle d'écoulement 1D suivant :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[\beta Q U] - U_s q_L + \int_0^h u(U_s - u) \frac{\partial b}{\partial x} dy + \int_0^h v(U_s - u) \frac{\partial b}{\partial y} dy = -g S \left(\cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} - \sin(\alpha) \right) - g S J \quad (47)$$

On retrouve bien le modèle classique de Saint-Venant (utilisé et validé expérimentalement dans plusieurs travaux de la littérature) si la section transversale est de forme rectangulaire et le canal est prismatique ($b_{,y} = 0$ et $b_{,x} = 0$, respectivement) de faible pente ($\cos(\alpha) \sim 1$ et $\sin(\alpha) \sim \tan(\alpha) = I$). On retrouve également démontrer le modèle de Saint-Venant si on fait l'hypothèse d'uniformité de la vitesse sur la section transversale (valable dans le cas théorique où Re tend vers l'infini).

Pour une section rectangulaire et un canal non prismatique de pente quelconque, le modèle se simplifie comme suit :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[\beta Q U] - \lambda U q_L + (\lambda - \beta) U Q \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} = -g \cos(\alpha) S \frac{\partial (h + z_0)}{\partial x} - g S J \quad (48)$$

Où z_0 représente la cote du fond du canal et h est la profondeur du fluide, on a :

$$h = \frac{z - z_0}{\cos(\alpha)} \quad \text{et} \quad \tan(\alpha) = -\frac{\partial z_0}{\partial x} \quad (49)$$

Avec z la cote de la surface libre

Les équations (31), (48) et (49) représentent notre modèle unidirectionnel de l'écoulement qui tient compte des variations des sections et des pentes le long d'un canal. Il peut être appliqué pour l'étude des écoulements de l'eau dans la nature et également, avec une loi de frottement J appropriée, pour l'étude des écoulements des fluides visqueux et dans certaines limites viscoplastiques. Pour évaluer les pertes de charge linéaire (pente de frottement J), on reproduit ici l'hypothèse que tous les hydrauliciens utilisent. On suppose que la contrainte moyenne à la paroi dans une section quelconque d'un écoulement graduellement varié est

égale à la contrainte moyenne à la paroi de l'écoulement uniforme ayant les mêmes valeurs du débit et de la hauteur locale.

On suppose également que les propriétés de l'écoulement uniforme sont :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad ; \quad v = 0 \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 0 \quad (50)$$

Ainsi, pour un modèle Newtonien, il vient d'après l'équation (34) :

$$\frac{\mu}{\rho}(u_{,yy} + u_{,zz}) = -g \sin(\alpha) \quad (51)$$

Soit aussi d'après l'équation (48) :

$$J = \sin(\alpha) \quad (52)$$

En remplaçant dans l'équation (51), il vient :

$$\frac{\mu}{\rho}(u_{,yy} + u_{,zz}) = -g J \quad (53)$$

C'est l'équation de Laplace qui peut être résolue pour différentes formes de la section. D'une manière générale, on a pour un écoulement laminaire :

$$J = \frac{\alpha_f}{\text{Re}} \frac{|U|}{2g D_H} U \quad (54)$$

Où D_H et Re sont respectivement le diamètre hydraulique et le nombre de Reynolds :

$$D_H = \frac{2S}{P} \quad \text{et} \quad \text{Re} = \frac{\rho U D_H}{\mu} \quad (55)$$

Avec S et P étant respectivement la surface et le périmètre mouillé de la section transversale. Dans le calcul du périmètre mouillé, seuls les contacts terre-eau sont à considérer.

α_f est un paramètre qui dépend de la forme de la section et qui peut être déterminé dans les conduites ou dans les canaux diverses à partir des solutions exactes : solutions analytiques de Boussinesq (1868) pour des sections planes et elliptiques et beaucoup d'autres solutions données sous forme de séries par Berker (1963), White (1974), Zarling (1976), Burgess et Mahajerin (1987)...

Les écoulements laminaires de l'eau dans la nature sont purement théoriques. Ils peuvent se présenter uniquement pour des très faibles hauteurs ou débits (le nombre de Reynolds doit être inférieur à une valeur critique égale dans les conduites circulaires à environ 2400). Pour le cas considéré ici de l'écoulement de l'eau dans la nature, il convient de prendre une loi de frottement pour un écoulement turbulent rugueux, comme celle de Manning (1891) et Strickler (1923) qui s'exprime, comme suit :

$$J = \frac{n^2 |U|}{R_H^{4/3}} U \quad (56)$$

Où $R_H = D_H / 2$ est le rayon hydraulique et n est le coefficient de Manning

Les conditions aux limites peuvent être variées : niveau de la mer, extrapolation des courbes de tarage, hauteurs près des structures hydrauliques...

Prenons l'exemple d'un déversoir suffisamment épais occupant toute la largeur du canal. Si nous supposons que les effets de la pente du canal et du frottement sont nuls et que l'écoulement est dénoyé, alors :

$$H_{am} = \left(\frac{Q}{BC} \right)^{2/3} + Z_{sp} + p \quad (57)$$

Avec Z_{sp} la cote inférieure du déversoir, p étant la pelle et C est une valeur empirique dépendant de la longueur du déversoir. On a pour un déversoir suffisamment épais :

$$C = \sqrt{g} \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} \approx 1.7 \quad (58)$$

Pour un écoulement noyé :

$$H_{am} = \left(\frac{Q}{BK C} \right)^{2/3} + H_{av} \quad (59)$$

Où K est un coefficient dépendant du taux de submersion T_u défini comme suit :

$$T_u = \frac{|H_{av} - Z_{sp} - p|}{H_{am} - Z_{sp} - p} \quad (60)$$

La variation de K avec T_u est donnée dans Hec-Ras dans une figure que nous ne la présenterons pas dans ce travail. On note seulement que d'après cette figure le passage de l'écoulement dénoyé à l'écoulement noyé se présente pour T_u égal à environ 0.82, au dessous de cette valeur l'écoulement peut être considéré comme dénoyé.

H_{am} et H_{av} représentent respectivement les charges hydrauliques à l'amont et à l'aval de la structure. On a pour la charge amont :

$$H_{am} = \frac{Q^2}{2gS_{am}^2} + h_{am} + Z_{am} \quad (61)$$

Où S_{am} est la section mouillée à l'amont de la structure et Z_{am} étant la cote du fond

Considérons maintenant le cas d'une vanne de profondeur occupant toute la largeur du canal et de hauteur H_0 . Si nous supposons que l'écoulement est dénoyé, alors :

$$H_{am} = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{m S_0} \right)^2 + H_{av} \quad (62)$$

Avec $S_0 = B \times H_0$ et m étant une valeur empirique d'environ 0.6

L'écoulement noyé se produit lorsque $h_{av} > h_{cj}$ avec

$$h_{cj} = \frac{1}{2} m H_0 \left(\sqrt{1 + 8 Fr_c^2} - 1 \right) \quad \text{et} \quad Fr_c = \frac{Q}{m S_0 \sqrt{g m H_0}} \quad (63)$$

Enfin, la vanne n'aura pas d'influence sur l'écoulement si $h_{am} \leq H_0$ et on a dans ce cas $H_{am} = H_{av}$.

Le débit latéral q_L intervient notamment dans les carrefours hydrauliques, prélèvement latéral et également en cas de débordement par dessus de la berge. On admet dans ce dernier cas que l'écoulement peut être dénoyé et on applique la formule classique du déversoir suivante :

$$q_L = C B (h - p(x))^{3/2} \quad \text{si} \quad h \geq p(x) \quad \text{sin on} \quad q_L = 0 \quad (64)$$

En cas de crue, le débit est en fonction du temps et peut être généré à partir de la formule suivante :

$$Q = Q_b + Q_p \left[\frac{t}{t_p} \exp \left(1 - \frac{t}{t_p} \right) \right]^I \quad (65)$$

Q_b est le débit de base, c'est-à-dire le débit avant la montée de crue, Q_p est le débit de pointe, c'est-à-dire le débit à l'apogée de la crue, t_p est la date du pic et I est un paramètre sans dimension réglant l'étalement de l'hydrogramme.

Dans le cas d'une rupture de barrage sur fond mouillé, le front d'onde entraîne l'apparition d'une onde de choc positive d'amont qui peut être calculée à partir des relations de sauts de Rakine-Hugoniot, pour pouvoir résoudre le problème.

Notons que le modèle ainsi obtenu ne peut être appliqué dans la nature que pour un écoulement dans le lit mineur où la section reste régulière et proche d'une section rectangulaire. Il se peut dans le cas d'une forte crue que l'écoulement se produit dans les lits majeur et mineur. On dit alors que l'écoulement est en lit composé. Fread (1976) et Smith (1978) ont abordé ce problème en divisant le système en deux canaux distincts et écrivent l'équation dynamique de Saint-Venant et l'équation de continuité pour chaque canal. Ils supposent que la surface d'eau est horizontale à chaque section normale à la direction de l'écoulement et que la pente de frottement est la même dans le lit mineur et le lit majeur. Par la suite, Barkau (1982) manipule les équations aux différences finies pour le lit mineur et le lit majeur est défini un nouvel ensemble des équations dont le calcul était plus pratique. Les équations obtenues par Barkau sont à la base de la solution du logiciel Hec-Ras. L'un des perspectives futurs de ce travail est d'étendre l'analyse de Barkau avec notre modèle d'écoulement.

Dans la suite des développements, nous considérons le cas des écoulements permanents dans un canal ou une rivière de faible pente ($\cos(\alpha) \sim 1$ et $\sin(\alpha) \sim \tan(\alpha) = I$).

IV. Modèle unidirectionnel pour un canal convergent ou divergent de faible pente

Cette analyse vise à mieux comprendre les écoulements fluvial ou torrentiel qui se produisent autour des ponts, les buses, et d'une manière plus générale en cas d'un rétrécissement ou d'un élargissement brusque ou bien encore en cas d'un rétrécissement brusque suivi sur une très courte distance d'un élargissement brusque de la section. L'écoulement est dans ce cas 2D, mais il est possible de contourner le problème avec la formulation 1D proposée dans cette étude. En effet, en cas de rétrécissement ou d'élargissement brusque de la section, il apparaît des zones mortes dans les coins. La surface qui sépare les zones mortes des zones en écoulements est actuellement connue, par l'expérience ou par la résolution numérique du modèle 2D.

Considérons un canal de faible pente I de section transversale rectangulaire portant un débit constant (écoulement permanent). Le canal est non prismatique et sa largeur varie comme suit

$$b(x, y) = b(x) = B_0 (1 + f(x)) \quad (66)$$

Le canal est convergent si $f' < 0$, autrement il est divergent

Pour un écoulement permanent et un débit latéral nul, le modèle d'écoulement se simplifie, comme suit :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{I - J + C_1 Fr^2 \frac{h}{b} \frac{\partial b}{\partial x}}{1 - Fr^2} \quad (67)$$

Où

$$Fr^2 = \frac{\beta Q^2}{g b^2 h^3} \quad \text{et} \quad C_1 = \frac{2\beta - \lambda}{\beta} \quad (68)$$

$C_1 = 0.75$ en régime laminaire et il varie entre 0.786 à 0.922 en écoulement turbulent. Selon notre analyse C_1 ne devrait pas donc dépasser l'unité pour une section plane.

Par simplification, nous supposons maintenant que la pente du canal et le terme dû au frottement J sont négligeables, il résulte :

$$\frac{\partial h}{\partial b} = \frac{C_1 Fr^2}{1 - Fr^2} \frac{h}{b} \quad (69)$$

On pose :

$$\hat{h} = \frac{h}{h_0} \quad ; \quad \hat{b} = \frac{b}{B_0} \quad ; \quad \hat{x} = \frac{x}{h_0} \quad (70)$$

L'équation (69) devient :

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{b}} = \frac{C_1 Fr_0^2}{\hat{b}^2 \hat{h}^3 - Fr_0^2} \frac{\hat{h}}{\hat{b}} \quad (71)$$

C'est l'équation différentielle qui gouverne l'écoulement dans les convergents et les divergents. La résolution de cette équation est numérique et on a utilisé la méthode des différences finies. Il apparaît que la solution du problème est de la forme $\hat{h}(x) = \hat{h}(\hat{b}, Fr_0)$. Ce qui signifie que la hauteur d'eau à l'aval divisé par la hauteur d'eau à l'amont dépend seulement du nombre de Froude incident (Fr_0) et du rapport de la largeur du canal à l'aval par la largeur du canal à l'amont, soit :

$$\frac{h_{av}}{h_0} = g \left(Fr_0, \frac{B_{av}}{B_0} \right) \quad (72)$$

Donc, en négligeant la pente et les frottements, la hauteur d'eau à l'aval ne dépend pas de la forme du canal.

Cette solution est représentée dans les figures 3 et 4 en fonction du nombre de Froude incident (Fr_0). Qu'il soit pour un divergent ($\hat{b} > 1$, figure 3) ou pour un convergent ($\hat{b} < 1$, figure 4), on peut partager l'écoulement en deux classes : Si $Fr_0 > 1$ (écoulement torrentiel), alors la profondeur de l'eau diminue avec b , sinon si $Fr_0 < 1$ (écoulement fluvial), la profondeur d'eau augmente avec b . Une singularité dans l'écoulement apparaît à $Fr_0=1$ (écoulement critique). Dans la figure 5, on représente la comparaison de notre solution du problème avec les mesures présentées par Berrekzi et al 2009. Les mesures ont été réalisées dans un canal divergent suivant la loi :

$$f(x) = \left(\frac{x}{B_0 Fr_0} \right)^{3/2} \quad (73)$$

Avec $h_0 = 0,0305\text{m}$, vitesse longitudinale à l'amont $u_0 = 1,094\text{ m/s}$, vitesse transversale à l'amont $v_0 = 0\text{ m/s}$, le canal est horizontal, le coefficient de rugosité de Manning $n = 0,012$, $h_0/B_0 = 0,25$, correspondant à une largeur $B_0 = 0,122\text{m}$, le nombre de Froude incident $F_0 = 2$. On obtient la même forme de la surface libre et la courbe théorique se superpose bien avec les mesures pour $C_1 = 1.4$. La valeur de C_1 ainsi obtenues est supérieure à 1. Il est possible que ceci est dû à l'influence de l'écoulement 2D.

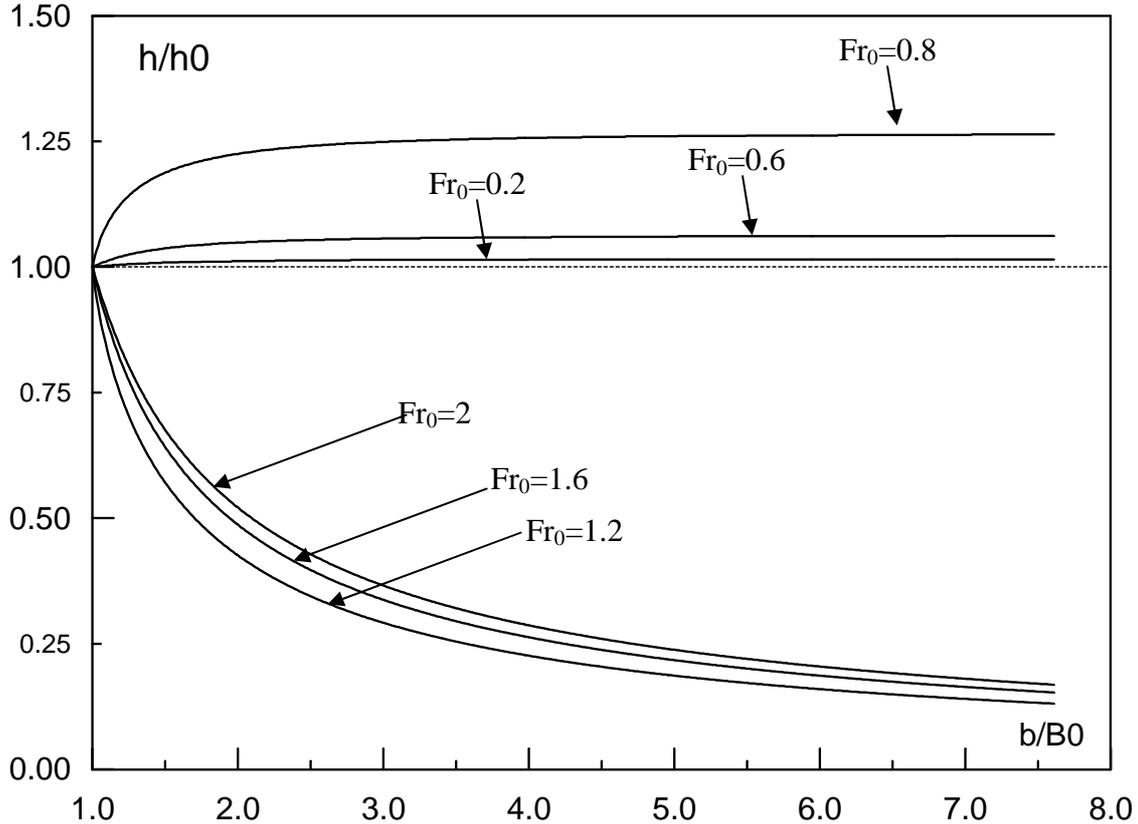


Figure 3 : Profil de la surface libre en fonction de la largeur de la section pour un divergent

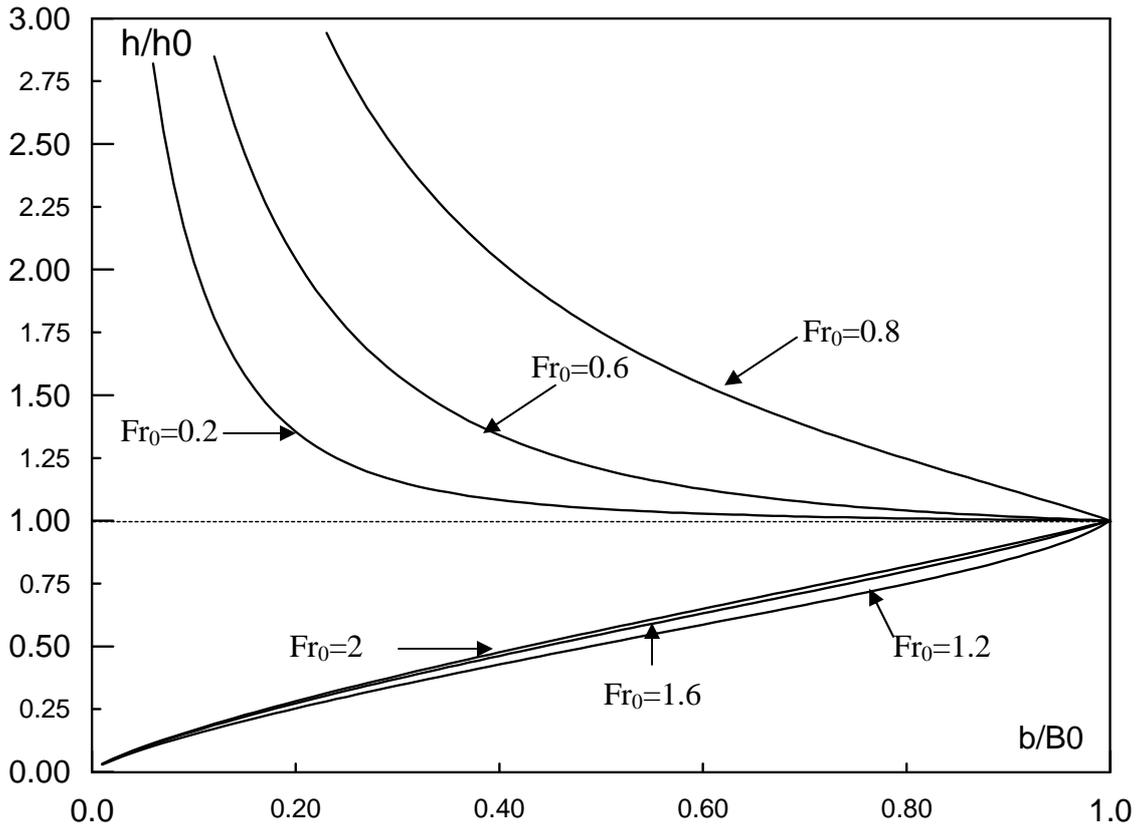


Figure 4 : Profil de la surface libre en fonction de la largeur de la section pour un convergent

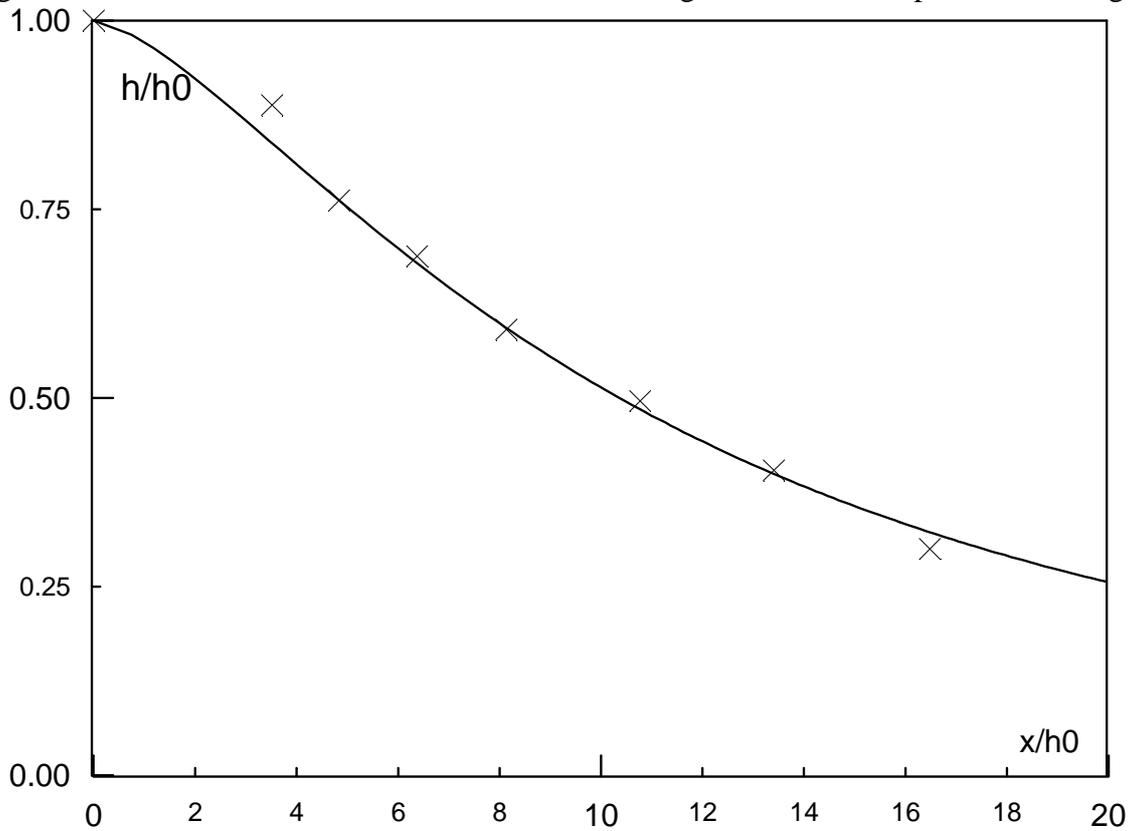


Figure 5 : Comparaison du profil théorique de la surface libre avec le profil expérimental dans l'axe central du canal (Berrekzi et al 2009) : \times mesures, — théorie

V. Différences par rapport aux modèles 1D proposés dans la littérature

Considérons un canal de faible pente, de section transversale rectangulaire et un écoulement permanent.

L'équation dynamique s'écrit :

$$\frac{\partial H}{\partial x} - C_0 \frac{U q_L}{g S} = -(J + J_S) \quad (74)$$

Où H est la charge hydraulique :

$$H = \beta \frac{U^2}{2g} + z \quad (75)$$

z est la cote de la surface libre $\approx h + z_0$ avec z_0 la cote du fond du canal

Pour un écoulement turbulent rugueux, la formule de Manning Strickler donne :

$$J = \frac{n^2 |U|}{R_H^{4/3}} U \quad (76)$$

J_S est la perte de charge singulière due à la variation progressive de la section suivant l'axe de l'écoulement.

$$J_S = 2 h_L \left[\frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} \right] \quad (77)$$

Où h_L est une hauteur caractéristique définit comme suit :

$$h_L = C_0 \frac{U^2}{2g} \quad (78)$$

Pour une section plane:

$$C_0 = \lambda - \beta = \begin{cases} 0.3 & \text{écoulement la min aire} \\ 0.08 \text{ à } 0.22 & \text{écoulement turbulent} \end{cases} \quad (79)$$

On retrouve bien le modèle de Saint-Venant utilisé dans plusieurs travaux antérieurs pour un canal prismatique ($J_S=0$).

Pour un canal non prismatique, on a :

$$J_S = C_0 \frac{q_L U}{g S} - \frac{\partial h_L}{\partial x} - 2 \frac{h_L}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (80)$$

L'équation (74) se réécrit alors :

$$\frac{\partial H}{\partial x} - 2C_0 \frac{U q_L}{g S} = -(J + J_L) \quad (81)$$

Avec :

$$J_L = \frac{\partial h_L}{\partial x} - \frac{2}{h} \frac{\partial (h h_L)}{\partial x} \quad (82)$$



Terme proposé dans la littérature Terme supplémentaire

Il apparaît donc un terme de perte de charge singulière en plus qui vient s'ajouter au terme déjà proposé dans quelques travaux de la littérature et dans Hec-Ras également.

VI. Conclusion

Nous montrerons finalement dans cette étude l'invalidité du modèle de Saint-Venant pour représenter l'écoulement de l'eau dans les rivières où la section change d'une abscisse à une autre. Par ailleurs, le modèle reste valable pour un écoulement dans un canal prismatique de section rectangulaire, c'est pour quoi le modèle a été validé expérimentalement dans les laboratoires. Par conséquent, tout logiciel basé sur le modèle unidirectionnel de Saint Venant est incomplet. Je montre que la voix de l'approche monodimensionnelle est une solution du problème, car elle peut être robuste et en plus elle permet de reproduire la plus part des observations utiles pour les ingénieurs, comme les profondeurs d'eau et les vitesses moyennes, mais cette approche doit reposer sur un développement mathématique correct. En effet, en utilisant la règle de Leibnitz pour la dérivation sous le signe intégrale, il apparaît des termes de flux supplémentaires d'origine l'inertie (désignés par des pertes de charge singulières) qui dépendent des variations des largeurs de la section transversale avec les abscisses et les cordonnées. Ainsi, il est devenu maintenant possible d'intégrer ce nouveau modèle pour l'étude, avec une meilleure précision et moins de paramètres, les écoulements de l'eau dans les lits mineurs des rivières. Le développement du modèle pour les écoulements en lits composés peut être considéré comme perspectif futur de ce travail.

Références

- [1] Aguirre-PE, J, Plachco, F.P, Quisca, S. (1995) "Test and numerical one-dimensional modelling of high-viscosity" J. Hydraul. Res., 33(1) ; 17-26.
- [2] Barkau, R.L. (1982) "Simulation of the July 1981 Flood Along the salt river" Report for CE695 BV, special problems in Hydraulics, Department of Civil Engineering, Colorado state University, Ft. Collins, CO
- [3] Berreksi, A, Kettab, A, Remini, B. (2009) «Etude D'un Ecoulement Supercritique Bidimensionnel à Travers un Elargissement Progressif de Canal » European Journal of Scientific Research, Vol.26 No.1, pp.147-153.
- [4] CHANSON, H. (2006) "Solutions Analytiques de l'Onde de Rupture de Barrage sur Plan Horizontal et Incliné." JI La Houille Blanche, No. 3, pp. 76-86
- [5] Debiane, K. (2000). "Hydraulique des Ecoulements Laminaires à Surface Libre dans un Canal pour des Milieux Visqueux ou Viscoplastiques: Régimes Uniformes, Graduellement Varié, et Rupture de Barrage". Thèse de l'Université Joseph Fourier, INPG-CNRS, France, 273 pages.
- [6] Debiane, K, Piau, J.M. (2001) "Ecoulement généré par le lâcher instantané d'un barrage retenant un fluide viscoplastique." Les Cahiers de Rhéologie, vol.XVIII, No.1, pp. 45-54

[7] De Saint-Venant, B. (1871) Théorie du mouvement non permanent des eaux. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 73, 237.

[8] Fread, D.L. (1976) "Flood Routing in Meandering Rivers with Floodplain", Rivers '76 Symposium on Inland Waterways for Navigation, Flood Control and Water Diversion, Vol. I, ASCE, Fort Collins, C, pp. 164-197.

[9] Hunt, B. (1994) "Newtonian fluid mechanics treatment of debris flows down a slope" J. of Hydraul Eng, 120(12); 1363.

[10] Piau, J.M. (1996). "Flow of a Yield Stress Fluid in a Long Domain. Application to Flow on an Inclined Plane." JI of Rheology, Vol. 40, No. 4, pp. 711-723.

[11] Smith, R.H. (1978) "Development of flood routing model for small meandering Rivers," Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of Missouri at Rolla, MO

[12] "HEC-RAS 4.0 Hydraulic Reference Manual", mars 2008, <http://www.hec.usace.army.mil/>